Inhaltliches Denken vor Kalkül –
Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten

Vorversion eines Beitrags für den Sammelband: Fritz, Annemarie / Schmidt, Siegbert (Hrsg.): Fördernder Arithmetikunterricht in der Sekundarstufe I (Arbeitstitel), Beltz Verlag, Weinheim.

„So reines Rechnen geht ja gerade noch, aber Textaufgaben kann ich nicht!" Oft geben Lernende solche Einschätzungen, und Lehrkräfte und empirisch Forschende können sie bestätigen: Gerade die verständige Anwendung mathematischer Konzepte und Verfahren auf Sachsituationen scheint insbesondere schwächeren Schülerinnen und Schülern große Probleme zu bereiten.

Im ersten Teil dieses Beitrags wird anhand einiger empirischer Forschungsergebnisse eine Präzisierung und Ursachenanalyse zu diesen Problemen angeboten und dabei insbesondere auf den Teilaspekt der inhaltlichen Vorstellungen fokussiert. Aus der Analyse erwachsen im zweiten Teil Vorschläge für einen fördernden Umgang mit Textaufgaben, der sich an dem alten, aber och immer brandaktuellen didaktischen Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" orientiert und sowohl vorbeugend zur Verhinderung von Problemen als auch zur Bearbeitung bereits aufgetretener Rechenschwierigkeiten eingesetzt werden kann.

Im dritten Teil soll am Beispiel der Termumformungen aufgezeigt werden, dass sich das Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" nicht auf Textaufgaben beschränkt, sondern in vielen Bereichen tragfähig ist, in denen nachhaltig gelernt werden soll.

1. Beschreibung und Ursachenanalyse für Schwierigkeiten mit Textaufgaben

1.1. „Wie soll ich denn hier rechnen?" Empirische Einblicke zu Schwierigkeiten mit Textaufgaben und Rechengeschichten

Viele Untersuchungen der letzten Jahrzehnte haben in unterschiedlichen Facetten auf die besonderen Schwierigkeiten mit Textaufgaben hingewiesen (Verschaffel/Greer/De Corte 2000, Cooper/Dunne 2000, Grassmann 1993, Schütte 1993 u.v.a.). Wie unterschiedlich diese Schwierigkeiten gelagert sein können, soll anhand der folgenden Aufgabe aus dem Schulbuch mathe live 7 aufgezeigt werden:

> „Im Salzbergwerk Bad Friedrichshall wird Steinsalz abgebaut. Das Salz lagert 40m unter Meereshöhe, während Bad Friedrichshall 155 m über Meereshöhe liegt. Welche Strecke legt der Förderkorb bis zur Erdoberfläche zurück?" (Emde et al. 2000, S. 19)

Drei zentrale Hürden lassen sich in den Übersetzungsprozessen von der realen Situation zur Mathematik und zurück ausmachen, nämlich Schwierigkeiten

1. im Erfassen der Situation (z.B. bzgl. Leseverständnis, sprachlicher Dekodierung, erforderlichen Weltwissens oder Strukturierung der Situation),
2. in der Operationswahl und
3. mit der Validierung und der Authentizität des Kontextes.

1. Schwierigkeiten im Erfassen der Situation

Kaiser und Schwarz (2008) haben in qualitativen Fallstudien mit Jugendlichen russischen Sprachhintergrunds aufgezeigt, wie viele sprachlich-kulturell basierte Schwierigkeiten die Erfassung der vorgestellten Salzbergwerkaufgabe aufwerfen kann. *Fehlendes Weltwissen* in einem für Siebtklässler nicht alltagsnahen Kontext (Welche Rolle spielt hier die Meereshöhe? Wird Salz über oder unter Tage abgebaut?) tritt dabei ebenso auf wie *spezifische Sprachprobleme*, die sie auf eine fehlende Bewusstheit der Lernenden zur Bedeutsamkeit der Strukturwörter wie „unter", „über", „während" zurückführen. Kaiser und Schwarz (2008) rekonstruieren an dem Beispiel typische sprachliche Schwierigkeiten von Lernenden mit Deutsch als Zweitsprache, die genauso relevant sind für Lernende mit nur unzureichend elaborierter Erstsprache. Dabei zeigt sich insbesondere, wie schwer die für Umgangssprache bewährte Fokussierung auf inhaltstragende Substantive (Was ist ein Salzbergwerk?) in Passung zu bringen ist mit der Dominanz der Strukturwörter in der Bildungssprache. Daraus erwachsen strukturelle Schwierigkeiten im Erfassen der Aufgabenstellung, die über fehlende einzelne Vokabeln deutlich hinausgehen.

Dies ist eine für Mathematik besonders bedeutsame Facette (unter mehreren) der in breiter Form dokumentierten erheblichen Schwierigkeiten *im sinnentnehmenden Lesen*, zu dem laut der PISA-Studie 2006 (Prenzel u.a. 2007, S. 15) etwa 20 % der getesteten 15-Jährigen nur sehr eingeschränkt fähig sind. Zwar bedürfen die quantitativen Befunde aus PISA zu korrelativen Zusammenhängen zwischen Leseverständnis und der Kompetenz zum Lösen mathematischer Textaufgaben weiterer Ausdifferenzierungen (vgl. etwa Schukajlow/Leiß 2008), gleichwohl wird deutlich, welch entscheidende Hürde bereits das Textverständnis bilden kann. Dem ist mit einem allgemeinen, bereichsunabhängigen Lesetraining teilweise abzuhelfen. Dass aber das Erfassen der Situation auch deutliche mathematikspezifische Anteile hat, soll im Weiteren dargelegt werden.

Eine zentrale Strategie, die beim Erfassen der Situation der Salzbergwerkaufgabe helfen könnte, um auf die strukturellen Aspekte zu fokussieren, wäre das Zeichnen geeigneter Darstellungen der Situation, wie die von Paul und Tom (in Abb. 1). Da dies jedoch bereichs- und situationsspezifische Kenntnisse geeigneter Darstellungen erfordert, soll es erst im zweiten Abschnitt vertieft werden.

2. Schwierigkeiten bei der Wahl der Rechenoperation

Jacob: 40 Meter und 155 Meter, soll ich da plus oder minus oder mal rechnen?
Lilly: Na ja, mal macht wohl keinen Sinn.
Jacob: Okay, meinetwegen. Was von beidem nehmen wir dann?
Lilly: Hm, das Salzbergwerk ist ja ganz tief unten, also muss doch die Zahl groß sein, nehmen wir plus.
Jacob: Aber noch größer wäre es bei mal? 40 mal 115, das sind ja über 4 km?
Lilly: Nee, echt, besser plus.

So überlegten Lilly und Jacob (7. Klasse Gesamtschule), denen die Autorin die Salzbergwerkaufgabe vorgelegt hat und deren Bearbeitung audiographiert und transkribiert wurde.

Gerade wenn die Situation nicht vollständig erfasst ist (s.o.), fällt insbesondere rechenschwächeren Lernenden die Entscheidung für eine Operation oft schwer: „Die Schülerinnen und Schüler sind bei der Ansatzfindung hilflos, weil sie nicht erkennen, welche Rechenoperationen zur Lösung anzuwenden sind.“ (Grassmann 1993, S. 131). Dieser Befund wird durch viele Untersuchungen bestätigt (z.B. Schütte 1993, Moser Opitz 2007, Prediger 2008a) und soll in Abschnitt 2 weiter vertieft werden.

3. Schwierigkeiten mit Validierung und Authentizität des Kontextes

Lillys und Jacobs Lösungsverhalten zeugt allerdings nicht allein von kognitiven Schwierigkeiten. Es zeigt eine weitere, eher haltungsbezogene Facette, die unter dem Stichwort der sogenannten Kapitänsaufgaben in der didaktischen Literatur breit diskutiert wurde. „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?“ Ausgelöst wurde die Diskussion durch diese Aufgabe und Baruks (1989, S. 9ff) Berichte, wie viele Lernende bereit seien, auch in völlig sinnentleerten Aufgaben wie dieser Kapitänsaufgabe die Ergebnisse durch willkürliche Verrechung der im Aufgabentext genannten Zahlen zu bestimmen.

Gerade Lernende, die den Sinn einer Aufgabe nicht konstruieren können, tendieren dazu, auftauchende Zahlen willkürlich miteinander zu kombinieren, so wie Lilly und Jacob. Intensive weitere Forschungen zu der Thematik haben gezeigt, wie häufig diese Schwierigkeit durch Unterricht erzeugt wird, der Lernenden das Hinterfragen von Textaufgaben systematisch abgewöhnt (vgl. Verschaffel et al. 2000).

Wie wenig trivial die Einschätzung für Lernende ist, wie ernst man einen Kontext jeweils nehmen soll, zeigen die Überlegungen von Paul und Tom, die ebenfalls aus Interviews der Autorin mit Siebtklässlern zur Salzbergwerkaufgabe stammen. Beide hatten sich bereits erfolgreich ein Bild von der Situation erstellt (Abb. 1) und diskutierten nun:

Paul: Okay, dann 40 und 155, macht 195 Meter.
Tom: Ja, und nun hängt es davon ab, wie groß der Förderkorb ist, denn der obere Rand erreicht ja früher die Erdoberfläche. Vielleicht 195 minus 1 Meter 50?

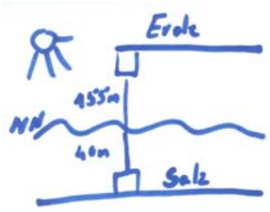


Abb. 1: Paul und Tom zeichnen die Situation der Salzbergwerkaufgabe

Diese sehr weittragenden Überlegungen waren vom Aufgabensteller sicher nicht intendiert. Aber ist nicht genau dies gewollt, sollen Lernende nicht ihre Ergebnisse validieren?

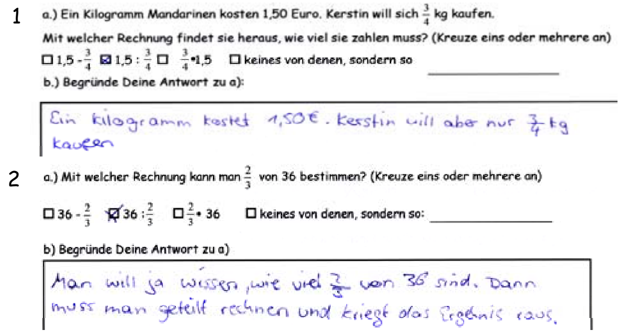
Diese Frage, wie ernst ein Kontext jeweils wirklich genommen werden soll, ist nur in Bezug auf die jeweilig etablierte Unterrichtskultur im Umgang mit mehr oder weniger realitätsbezogenen Aufgaben zu klären. Sie eröffnet ein weiteres großes Feld von strukturellen Schwierigkeiten mit Textaufgaben (vgl. dazu Cooper / Dunne 2000, aber auch Verschaffel et a. 2000, Baruk 1989 u.v.a.).

Während in diesem dritten der angesprochenen Schwierigkeitskomplexe vorrangig Fragen der Haltungen und der Unterrichtskultur tangiert sind und im ersten viele allgemein-kognitive Fragen, liegt im zweiten der fachdidaktisch-kognitive Kern, der im Folgenden vertieft werden soll, weil darin die direktesten Ansatzpunkte für Fördermöglichkeiten liegen.

1.2. Hintergründe der Übersetzungsschwierigkeiten – Grundvorstellungen und ihre Repräsentationen

Weitere exemplarische Befunde

Die Breite des Phänomens der nicht tragfähigen Operationswahl zeigt sich auch in anderen Zahlbereichen und Situationen, wie das Beispiel von Lara (9. Klasse Gymnasium) in Abb. 2 zeigt (aus Prediger / Matull 2008).


1 a.) Ein Kilogramm Mandarinen kosten 1,50 Euro. Kerstin will sich $\frac{3}{4}$ kg kaufen.
Mit welcher Rechnung findet sie heraus, wie viel sie zahlen muss? (Kreuze eins oder mehrere an)
☐ $1{,}5 - \frac{3}{4}$ ☒ $1{,}5 : \frac{3}{4}$ ☐ $\frac{3}{4} \cdot 1{,}5$ ☐ keines von denen, sondern so
b.) Begründe Deine Antwort zu a):
Ein Kilogramm kostet 1,50€. Kerstin will aber nur $\frac{3}{4}$ kg kaufen

2 a.) Mit welcher Rechnung kann man $\frac{2}{3}$ von 36 bestimmen? (Kreuze eins oder mehrere an)
☐ $36 - \frac{2}{3}$ ☒ $36 : \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{2}{3} \cdot 36$ ☐ keines von denen, sondern so:
b) Begründe Deine Antwort zu a)
Man will ja wissen, wie viel $\frac{2}{3}$ von 36 sind. Dann muss man geteilt rechnen und kriegt das Ergebnis raus.

Abb. 2: Laras Begründungen zur Wahl der Operationen (9. Klasse Gymnasium)

In einem schriftlichen Test mit 830 Schülerinnen und Schülern der Klassen 7 und 9 fanden nur 35 % der Lernenden die Multiplikation als richtige Operation zur ersten Aufgaben heraus, in der zweiten Aufgabe nur noch 14 % (Prediger / Matull 2008).

Diese Test-Ergebnisse deuten ebenso wie die Bearbeitung von Lilly und Jacob auf ein nicht voll entwickeltes inhaltliches Verständnis der Operationen (im jeweiligen Zahlbereich) hin. Hier liegt gerade für die erweiterten Zahlbereiche der negativen Zahlen und der Bruchzahlen eine Herausforderung für eine breite Schülerschaft (vgl. Hefendehl-Hebeker / Prediger 2006, Wartha und Wittmann in diesem Band), besonders für rechenschwache Lernende aber auch schon bei natürlichen Zahlen (Schütte 1993, Grassmann 1993, Moser Opitz 2007).

Nicht vollständig entwickelte inhaltliche Vorstellungen lassen sich durch die umgekehrte Fragestellung noch prägnanter diagnostizieren: Wird nicht die Mathematisierung von Textaufgaben, sondern die Interpretation gegebener Gleichungen verlangt, zeigen sich nicht tragfähige inhaltliche Vorstellungen von Operationen besonders gut. Dazu eignen sich Rechengeschichten (Schütte 2001) ebenso wie die Aufforderung, eine Operation einem jüngeren Kind zu erklären (z.B. Moser Opitz 2007). Auch dies soll durch zwei exemplarische Resultate belegt werden:

1. Moser Opitz (2007, S. 206f) bat in ihrer Untersuchung Lernende aus Klasse 5 und 8, eine Gleichung mit Multiplikation und danach mit Division (im Zahlenraum von 1 bis 21) für ein jüngeres Kind zu erklären, wahlweise rein verbal, mit Material oder Zeichnungen. Dies gelang für die Multiplikation knapp 60 % der Befragten mit durchschnittlichen Mathematikleistungen, aber nur knapp 30 % der als rechenschwach eingestuften Befragten. Bei der Division gelang dies sogar nur knapp 20 % der als rechenschwach eingestuften und 50 % der Vergleichsgruppe der Befragten mit durchschnittlichen Mathematikleistungen.
2. In Prediger / Matull (2008) wurden 830 Lernende aus Klasse 7 und 9 aufgefordert, eine Textaufgabe zur Rechnung $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$ zu finden. Nur 5 % der Befragten konnten hierzu eine vollständig tragfähige Antwort geben. Für die analoge Frage zu einer Addition waren es immerhin 56 %. Der Unterschied wird dadurch erklärbar, dass Lernende die für die natürlichen Zahlen aufgebauten elementaren Grundvorstellungen zum Addieren (und Subtrahieren) auf die Bruchzahlen übertragen können, beim Multiplizieren (und Dividieren) dagegen auf andere ausweichen müssen (Hefendehl-Hebeker / Prediger 2006).

Diese empirischen Beispiele stehen für einen in vielen Facetten nachgewiesenen „Mangel an Übersetzungsfähigkeit“ (Schütte 1993, S. 24), der mit Hilfe verschiedener theoretischer Konstrukte genauer gefasst wurde. Hier sollen die Grundvorstellungen und das Konstrukt des Operationsverständnisses vorgestellt werden, bevor ein eigenes Modell zur Konzeptualisierung der Übersetzungswerkzeuge entwickelt wird.

Grundvorstellungen als Konstrukt zur Lokalisierung von Übersetzungsfähigkeit

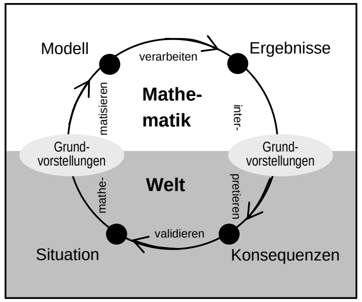


Abb. 3: Grundvorstellungen und ihre Verortung in Übersetzungsprozessen

In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik werden inhaltliche Vorstellungen mit dem Konzept der Grundvorstellungen beschrieben (vom Hofe 1992, Blum et al. 2004 u.v.m.).

Grundvorstellungen bezeichnen inhaltliche Interpretationen mathematischer Objekte (d.h. Begriffe, Operationen etc.) und ermöglichen, mathematische Begriffe oder Operationen zur Mathematisierung von Situationen zu nutzen oder umgekehrt mathematische Sachverhalte lebensweltlich zu interpretieren (vgl. Abb. 3, aus vom Hofe 2003, S. 5). „Grundvorstellungen sind unverzichtbar, wenn zwischen Realität und Mathematik übersetzt werden soll, das heißt, wenn Realsituationen mathematisiert bzw. wenn mathematische Ergebnisse real interpretiert werden sollen.“ (Blum et al. 2004, S. 146)

Während vom Hofe (1992) den Begriff ‚Grundvorstellungen’ sowohl im präskriptiven Sinne für die aufzubauenden mathematisch tragfähigen Interpretationen als auch im deskriptiven Sinne für die individuellen, teils idiosynkratischen Varianten nutzt, wird hier der Begriff Grundvorstellungen für die präskriptiv anzustrebende Ebene reserviert, während im deskriptiven Sinne von ‚individuellen Vorstellungen’ oder ‚individuellen Interpretationen’ gesprochen wird.

So aktiviert etwa Lara in der zweiten Aufgabe in Abb. 2 nicht die für die Aufgabenstellung nötige Grundvorstellung vom Multiplizieren als „Anteil-nehmen-von“. Daher kann sie die Textaufgabe zwar durch mehrschrittige Rechnung lösen, aber die Situation nicht multiplikativ mathematisieren. Stattdessen aktiviert sie wie viele ihrer Klassenkameraden eine individuelle, aber hier unpassende Deutung der Division über das Schlüsselwort „von“.

Lily und Jacob könnten für die Subtraktion zwar evtl. grundlegende Grundvorstellungen wie die des Wegnehmens zur Verfügung zu haben, zeigen aber nicht die für die Salzbergaufgabe nötige Grundvorstellung vom Subtrahieren als Bestimmen eines Abstands oder (dynamisch interpretiert) einer Änderung. (Dass diese Interpretation der Differenz als Änderung auch für ganze Zahlen tragfähig ist, also insbesondere auch Abstände zwischen negativen und positiven Zahlen, ist ein Phänomen, über das es sich im Lernprozess zu wundern lohnt!).

Zu vielen mathematischen Objekten und gerade den Rechenoperationen gibt es nicht nur eine tragfähige Grundvorstellung, sondern mehrere, die den Lernenden nicht immer gleich vertraut sind. Blum et al. (2004) unterscheiden Grundvorstellungen nach ihrem Vertrautheitsgrad durch die Einteilung in ‚elementare’ und ‚erweiterte’ Grundvorstellungen. Zum Beispiel wären die räumlich-simultane Vorstellung der Multiplikation ebenso wie die Deutung (bei Bruchzahlen) als Anteilnehmen-von erweiterte Grundvorstellungen, die fortgesetzten Addition dagegen eine elementare, meist dominante Vorstellung. In Bezug auf Funktionen werden die Zuordnungsvorstellung als elementar, die Kovariationsvorstellung als erweitert eingestuft.

Blum et al. (2004, S. 155) konnten in einer vertieften Analyse der PISA-Ergebnisse 2000 zeigen, dass bei dem Aufgabentypus der außermathematischen rechnerischen Items die Komplexität der geforderten Grundvorstellungen ein entscheidendes schwierigkeitsgenerierendes Merkmal darstellt: In ihrem probabilistischen testtheoretischen Modell lässt sich der empirische Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe (die Lösungshäufigkeit) durch die Komplexität der Grundvorstellungen erklären. Aufgaben, die erweiterte Grundvorstellungen oder Kombinationen elementarer Grundvorstellungen erfordern, wurden seltener gelöst als Aufgaben mit elementaren Grundvorstellungen.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sind tragfähige Grundvorstellungen aufgebaut, lassen sie sich auch zu komplexeren zusammen setzen. So muss man z.B. keine Formel für die Steigung einer linearen Funktion auswendig lernen, und sich wundern, wieso sie zwei Subtraktionen und eine Division enthält, wenn man die Grundvorstellung des Subtrahierens als Änderung und des Bruchs als Verhältnis verinnerlicht hat. Denn die Steigung einer linearen Funktion ergibt sich als Verhältnis der Änderungen der y-Werten zu denen der x-Werte (vgl. Usiskin 2008).

Operationsverständnis als flexibler Übergang zwischen Darstellungsformen

Während das Konstrukt der Grundvorstellungen auf die Beziehung von Situation und mathematischem Modell fokussiert, ist in einem parallel gewachsenen theoretischen Konstrukt der Mathematikdidaktik, dem des Operationsverständnisses, auch eine dritte Repräsentationsform einbezogen worden (vgl. Abb. 4 nach Huinker 1993). Gerster / Schulz (2004) beschreiben das Operationsverständnis in Anlehnung an Huinker als die Fähigkeit, zwischen drei Repräsentationsformen für Rechenoperationen hin- und herübersetzen zu können, nämlich „zwischen

a) (meist verbal beschriebenen) konkreten Sachsituationen,
b) modell- oder bildhaften Vorstellungen von Quantitäten,
c) symbolischen Schreibweisen (meist in Form von Gleichungen) für die zugrundeliegenden Quantitäten und Rechenoperationen.“

(Gerster/Schulz 2004, S. 351).

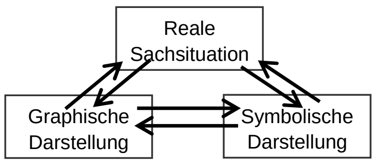


Abb. 4: Operationsverständnis als flexibler Wechsel zwischen Repräsentationen

Das so beschriebene Operationsverständnis kann somit einerseits als Teilaspekt der Grundvorstellungen betrachtet werden (die sich nicht nur auf Rechenoperationen, sondern auch auf andere mathematische Objekte wie Funktionen, Variable, Gleichwertigkeit von Termen u.v.m. beziehen lassen, s. Abschnitt 3).

Andererseits bietet das so beschriebene Operationsverständnis durch die Hinzunahme der graphischen Darstellungen eine geeignete Erweiterung des Grundvorstellungskonzepts, die im Folgenden integrierend ausgebaut werden soll.

Repräsentationen von Grundvorstellungen als Übersetzungswerkzeuge zwischen inhaltlichem und formalen Denken

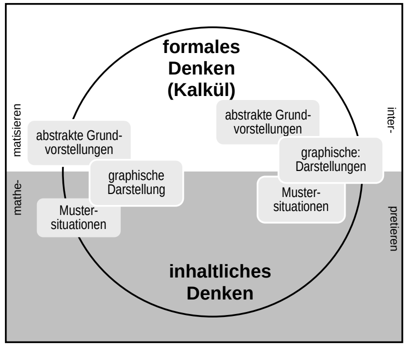
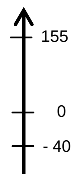


Abb. 5: Übersetzungswerkzeuge zwischen inhaltlichem und formalem Denken

In Abb. 5 werden beide Sichtweisen verbunden, so dass auch Aufschluss gegeben werden kann über die wichtige, aber bisher wenig gestellte Frage, wie Grundvorstellungen eigentlich mental repräsentiert sind. Die These dieses Artikels ist, dass Grundvorstellungen (und ebenso divergierende individuelle Vorstellungen) auf unterschiedliche Weise repräsentiert sein können:

- Viele Lernende bauen eine Grundvorstellung zuerst in der Repräsentation einer *paradigmatischen Mustersituation* auf (samt Memorierung der dazugehörigen Mathematisierung). Die nächste Situation kann dann mit dem gleichen mathematischen Objekt mathematisiert werden, wenn die Person die Analogie zur Mustersituation erkennen kann.
- Das Erkennen der Analogie wird vereinfacht durch eine zur Grundvorstellung passende *graphische Darstellung*, wie etwa der vertikale Zahlenstrahl, der Pauls und Toms Bild (Abb. 1) zugrunde liegt.



- Im fortgeschrittenen Stadium kann eine Grundvorstellung auch in *abstrakter Form* repräsentiert sein, wie etwa in der obigen kurzen Diskussion der Steigungsformel als Verhältnis von Änderungen. Auch Laras nutzte in der zweiten Aufgabe eine abstrakt repräsentierte (hier leider nicht tragfähige) individuelle Vorstellung: „bei von muss man geteilt rechnen“ (Abb. 3). Die abstrakte Repräsentation einer Grundvorstellung erfasst also den strukturellen Kern einer Klasse von Situationen oder graphischen Darstellungen, die durch ein mathematisches Objekt erfasst werden können. So abstrahiert zum Beispiel „Teil eines Ganzen“ von konkrete Kuchen oder Pizzen.

Zur weiteren Erläuterung sei ein Beispiel angeführt, das im Vorgriff auf Abschnitt 3 über Rechenoperationen etwas hinaus geht: Bei Gleichungen y = mx +b linearer Funktionen ist eine elementare Grundvorstellung für m die Änderungsrate, für b der Anfangswert. Fachleuten (z.B. Didaktikerinnen oder Lehrkräften) reicht diese abstrakte Formulierung der Grundvorstellung. Lernende hingegen müssen diese abstrakten Formulierungen erst mit Leben füllen, dazu helfen graphische Darstellungen (in denen der Anfangswert auf der y-Achse sichtbar wird und die Änderungsrate als Steigungs*dreieck*) und vor allem Mustersituationen, z.B. eine Füllsituation: „Wird die Badewanne regelmäßig (=Voraussetzung für Linearität!) mit Wasser befüllt und ist x die Zeit in Minuten und y die Wasserstandshöhe, so ist b der ursprüngliche Wasserstand und m drückt aus, wie viel Wasser pro Minute dazu kommt." Während die Formulierungen „Änderungsrate" und Anfangswert" bereits Verallgemeinerungen über viele Mustersituationen darstellen, ist die konkrete Mustersituation in ihrer Repräsentation spezieller, aber auch reichhaltiger. Sie umfasst hier z.B. auch die Interpretationen von x und y und die Vorbedingungen für eine lineare Mathematisierung. Lernende bearbeiten den Auftrag, eine andere Situation durch eine lineare Funktion zu mathematisieren, meist durch Analogieschlüsse zu Mustersituationen wie der Badewannensituation (Was spielt hier die Rolle des Zulaufs pro Minute?) oder mit Hilfe einer graphischen Darstellung, aber seltener durch direktes Zurückgreifen auf abstrakte Interpretationen.

Für den wissenschaftlichen Austausch über Grundvorstellungen in der didaktischen Literatur hat sich die abstrakte Repräsentationsform durchaus bewährt (man spricht prägnant über „Bruch als Verhältnis", „Subtrahieren als Abstand bestimmen" etc.). Im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler bilden dagegen die beiden anderen Repräsentationsformen einfacher zugängliche Brücken.

Die Literatur zum Operationsverständnis betont zu Recht, dass ein flexibler Wechsel zwischen den Repräsentationen die Erfolgschancen eines Übersetzungsprozesses erhöht, denn je nach konkreten Umständen kann sich eine andere Repräsentation als Übersetzungswerkzeug besonders bewähren. Daher ist das Verfügen-Können über mehrere Repräsentationen für Lernende so hochgradig nützlich und hilfreich – und die dafür den Lernenden zu gewährende Zeit ist gut investiert.

2. Inhaltliches Denken vor Kalkül - Ein didaktischen Konzept zum nachhaltigen Aufbau inhaltlicher Vorstellungen

Die zahlreichen empirischen Befunde zu defizitären Übersetzungsfähigkeiten und beschränkten Grundvorstellungsrepertoires von Lernenden bekräftigen, dass „die Förderung eines kompetenten Umgangs mit Textaufgaben nur über eine Rückgewinnung inhaltlicher Bedeutsamkeit gelingen wird." (Schütte 1993, S. 25) Diese Forderung nach Stärkung des inhaltlichen Denkens und des gezielten Aufbaus von Grundvorstellungen findet sich bei vielen Autoren über alle Schulstufen hinweg (z.B. Kirsch 1991, Bender 1991, Grassmann 1993, Malle 1993, Malle 2004, vom

Hofe 2003, Blum et al. 2004, Borneleit et al. 2001, Prediger 2008b u.v.a.). Gleichwohl ist das Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" in der Praxis des Unterrichtens und vor allem Prüfens bisher nur teilweise umgesetzt. Es soll daher hier bzgl. seiner Qualitätsmerkmale und Ausgestaltungsmöglichkeiten, auch im Hinblick auf die Repräsentationsformen von Grundvorstellungen, noch einmal diskutiert werden.

Zunächst sei angemerkt, dass das „vor" in der Formulierung des Prinzips auf zwei Weisen verstanden werden soll: 1. Im Sinne einer Prioritätensetzung, weil ein Kalkül ohne inhaltliche Grundlage für die Anwendung von Mathematik bedeutungslos ist, und 2. im zeitlich-chronologischen Sinne für den Lernprozess.

Ein Unterrichtsgang, der den nachhaltigen Aufbau tragfähiger Vorstellungen anstrebt, sollte also mit einer (oder mehreren) Sachsituation(en) beginnen, die als Mustersituation für das neu zu lernende mathematische Objekt dienen kann. Idealerweise wird sie mit geeigneten graphischen Darstellungen verbunden, um zugängliche Erinnerungsanker und geeignete Analogisierungsmittel zu bieten. Die Tätigkeiten im Umgang mit den neuen Objekten werden zu diesem Zeitpunkt inhaltsbezogen ausgeführt, erst danach erfolgt nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung (Treffers 1983) die Entwicklung eines Kalküls, dessen Korrespondenz zu den bereits vertrauten inhaltlichen Tätigkeiten explizit thematisiert wird.

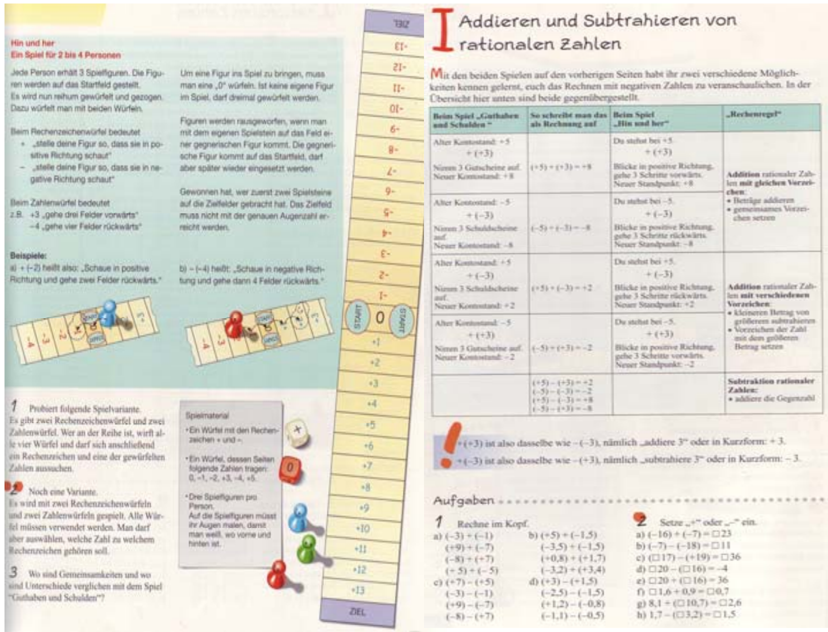


Abb. 6: Inhaltliche Erarbeitung von Addition und Subtraktion vor Kalkül (mathe live 7)

Dieses Vorgehen lässt sich am Beispiel zweier Seiten aus dem Schulbuch mathe live 7 in Abb. 6 (aus Emde et al. 2000, S. 15/16) verdeutlichen, in denen Addition und Subtraktion negativer Zahlen nach diesem Ansatz eingeführt wird. Da die Mathematisierung von Größen bzgl. einer Vergleichsmarke auf einer Skala (die zentrale Grundvorstellung für negative Zahlen selbst) sich erst in der Rückschau als Vorteil erkennen lässt, wählt das Schulbuch hier im Anschluss an Hefendehl-Hebeker (1989) den Zugang über ein Spiel als Mustersituation. Im Spiel werden die Operationen handelnd erlebbar, und das Spielbrett liefert die graphische Darstellung auf dem Zahlenstrahl gleich mit. Erst nach ausreichender Erfahrung mit diesem (und einem weiteren Spiel zu Guthaben und Schulden) werden die Wirkungen der Operationen schematisch zusammengestellt und zu kalkülhaften Rechenregeln formalisiert. So werden Addition und Subtraktion ganzer Zahlen nach dem Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül“ erarbeitet.

Macht das guter Mathematikunterricht nicht schon immer so? Tatsächlich beginnt praktisch jedes Schulbuch ein neues Kapitel mit einem vorstellungsbezogenen Zugang, indem eine lebensweltliche Einführungsaufgabe bearbeitet wird, bevor dann ein Kalkül etabliert wird. Die Schulbücher unterscheiden sich jedoch signifikant darin, wie ernst sie selbst diesen vorstellungsbezogenen Zugang nehmen, und wie schnell dann exklusiv zum Kalkül übergegangen wird (vgl. auch Prediger 2008b für ein kritisches Beispiel zum Erweitern von Brüchen). *Wer bleibt schon gern im Zugang stehen, sind doch Zugänge dazu da, so schnell wie möglich durchschritten und verlassen zu werden?*

Für nachhaltige Lernprozesse dagegen ist das Verweilen im inhaltlichen Denken ebenso entscheidend wie die Aufrechterhaltung der Bezüge zum inhaltlichen Denken nach Einführung des Kalküls. In diesem Punkt zeigt auch das vorgestellte Beispiel noch Weiterentwicklungsbedarf: Die Übungsaufgaben (auf der rechten Seite in Abb. 6) nach der Schematisierung nehmen in der ersten Auflage des Buches keinerlei Bezug mehr zu den aufgebauten Mustersituationen, damit wird die inhaltliche Ebene *endgültig* verlassen. Wer jedoch Lernenden nur zu Beginn einer Unterrichtseinheit Aufgaben mit Bezug zu inhaltlichen Vorstellungen anbietet und dann unwiederbringlich zum Kalkül übergeht, darf sich nicht wundern, dass die Brücke zum inhaltlichen Denken bei vielen abbricht. Deswegen kommt es nicht nur auf die Qualität des Zugangs an, sondern auch darauf, die Vorstellungsorientierung weiter aufrecht zu erhalten; keinesfalls statt Kalkül, aber immer wieder in Ergänzung dazu.

1 Rechne im Kopf. Erkläre deine Rechnungen mithilfe eines der Spiele.

a) (−3) + (−1)	b) (+5) + (−1,5)
(+9) + (−7)	(−3,5) + (−1,5)
(−8) + (+7)	(+0,8) + (+1,7)
(+5) + (−5)	(−3,2) + (+3,4)
c) (+7) − (+5)	d) (+3) − (+1,5)
(−3) − (−1)	(−2,5) − (−1,5)
(+9) − (−7)	(+1,2) − (−0,8)
(−8) − (+7)	(−1,2) − (−0,8)

3 a) Mit welchem der Spiele erklärst du lieber (−9) − (−4)? Oder hast du eine eigene Methode, um diese Rechnung zu erklären?
b) Überlege dir selbst fünf ähnliche Aufgaben und erkläre deine Rechenwege.

Abb. 7: Variierte Aufgaben in der Neuauflage nehmen inhaltliches Denken ernst (mathe live 7)

Wie durch leichte Veränderungen das Problem behoben werden kann, zeigt die zweite Auflage des gleichen Lehrwerks (vgl. zwei Beispiele in Abb. 7 aus Böer et al. 2007, S. 16/17), in dem auch die kalkülorientierten Aufgaben (die es zum Training der formalen Operationen selbstverständlich auch geben muss, denn die Möglichkeit der zeitweisen Ablösung vom inhaltlichen Denken ist entscheidend) immer wieder Bezug nehmen zum inhaltlichen Denken.

Diese Veränderung einer exemplarischen Schulbuchseite weist bereits einen Weg, wie Lehrkräfte auch mit klassischen Schulbüchern produktiv umgehen können. Er besteht aus drei zentralen Strategien:

1. Konsequent im Inhaltlichen verweilen, so dass Lernende mit dem neuen Inhalt zunächst Vertrautheit gewinnen können und selbst ein Bedürfnis nach denkentlastenden Abkürzungen empfinden. Dann kann nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung ein Kalkül angeboten werden.
2. Auch nach Einführung des Kalküls immer wieder Rechnungen an inhaltliche Denkweisen rückbinden, damit der Bezug nicht verloren geht.
3. Aufgaben mit inhaltlichen Bezügen auch in der Klassenarbeit einbauen.

Gerade der letzte Punkt erscheint entscheidend, denn nur wenn inhaltliche Vorstellungen auch abgeprüft werden, wird den Lernenden ihre Bedeutung bewusst und den Lehrkräften eine diesbezügliche Diagnose ermöglicht.

Für eine Diagnose individueller inhaltlicher Vorstellungen ist die Abfrage von Grundvorstellungen in abstrakter Repräsentation als Stichworte aus den oben genannten Gründen untauglich, aber alle anderen Repräsentationsformen sind interessant. Für inhaltliche Vorstellungen zu Rechenoperationen (und für andere mathematische Objekte sinngemäß genauso) eignet sich daher die von Huinker (1993) dokumentierte Systematik aller sechs Übersetzungsvorgänge zwischen graphischer bzw. handelnder Darstellung, Term und Mustersituation (vgl. Abb. 4 und Gerster/Schulz 2004, S 266). Dabei kann jede Aufgabe angereichert werden um den expliziten Auftrag zu erklären, wieso dies passt.

- *Sachsituation → graphische Darstellung*: Zeige an einem Bild oder mit Material, worum es in der Textaufgabe geht.
- *Graphische Darstellung → Sachsituation*: Erfinde eine Rechengeschichte (Textaufgabe, Situation), die zu diesem Bild passt.
- *Sachsituation → Term*: Schreibe eine Rechenaufgabe (Gleichung, Term) auf, die zu der Situation passt. Erkläre, was jede Zahl in dem Text bedeutet. Erkläre, warum du so gerechnet hast.
- *Term → Sachsituation*: Erfinde eine Rechengeschichte (Textaufgabe, Situation), die zu der Aufgabe (zu dem Term, Gleichung) …. passt.
- *Graphische Darstellung → Term*: Schreibe eine Rechenaufgabe (Term, Gleichung) auf, die zu diesem Bild passt.
- *Term → graphische oder handelnde Darstellung*: Zeige mit dem Material (oder einem Bild), was die Rechnung (der Term, die Gleichung) bedeutet.

Was hier für einen vorstellungsorientierten Unterrichtsgang im Sinne des vorbeugenden Umgangs mit Rechenschwierigkeiten beschrieben wurde, lässt sich natürlich auch für die Förderung nach Auftreten von Problemen nutzen. Dazu würde man mit den zuletzt genannten Aufgabentypen zunächst eine genauere Diagnose erstellen und dann die Etappen des Lernprozesses nachholen, über die im Unterricht vermutlich zu schnell hinweggegangen wurde.

3. Termumformungen – Übertragung des Prinzips auf andere mathematische Objekte

Das Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" greift nicht nur für die Rechenoperationen, sondern auch für den Bereich der Algebra, wie im Folgenden ebenso gezeigt werde soll wie im Beitrag von Berlin/Bertalan/Fischer/Hefendehl (in diesem Band).

3.1. Termumformungen als Beispielfeld für Kalkülfehler mit inhaltlichem Hintergrund

Natürlich ist nicht jedes Rechenproblem in den Übersetzungsprozessen zwischen realen Problemen und ihrer mathematischen Erfassung zu verorten (vgl. Prediger / Wittmann 2009); auch im rein formalen Bereich des Kalküls hat die empirische Forschung häufig wiederkehrende Fehlermuster aufgezeigt, wie etwa die beiden folgenden typischen Beispiele aus der elementaren Algebra:

$10n + 3 = 13n \qquad (a+b)^2 = a^2 + b^2$

Hinter der falschen Umformung im ersten Beispiel steckt oft das Fehlermuster „Gleiches zu Gleichem" (Tietze 1988, S. 191). Die Fehlerursache im zweiten Beispiel ist meist eine unzulässige Verallgemeinerung von Homomorphie-Schemata (vgl. Malle 1993, S. 161f). Beide Probleme lassen sich durch die alleinige Warnung vor Nichtbeachtung der regulären Umformungsregeln auf Kalkülebene höchstens kurzfristig verdrängen, aber nicht nachhaltig bearbeiten.

Zur Bearbeitung der zunächst im Kalkül verorteten Fehlermuster besteht eine gängige Förderstrategie in der Aufforderung zum Überprüfen der Termumformung durch Einsetzen von Zahlen. Dass auch dies allerdings nicht immer zum Erfolg führt, zeigt der folgende Dialog. Er stammt aus einer Fördersequenz der Autorin mit Lea (15 Jahre, Gesamtschülerin), die audiographiert und später transkribiert wurde:

Z45	SP:	Guck noch mal auf deine Rechnung, 10n + 3 = 13n, stimmt das wirklich?
Z46	Lea:	Ja, wieso?
Z47	SP:	Setz doch für n mal eine Zahl ein und überprüfe das.
Z48	Lea:	Wie meinen Sie das?
Z49	SP:	Na ja, nimm doch statt n mal die 4 und schreibe das auf.
Z50	Lea:	*[Schreibt 10 4 + 3, stockt]* Nee, wär' ja dann mal, *[schreibt 10 · 4 + 3 = 43]*
Z51	SP:	Und die 13n?
Z52	Lea:	Die wären dann, mhh, 52.
Z53	SP:	Und, fällt dir was auf?
Z54	Lea:	Nö, was? *[guckt auf die Zahlen, zögert]* Ist das wohl falsch?
Z55	SP:	Da kommt gar nicht das Gleiche raus?
Z56	Lea:	Nö. Aber ….. das ist ja auch mit 4, nicht mit n.

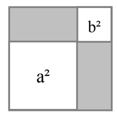
Die gewählte Förderstrategie setzt darauf, die inhaltliche Deutung der Variablen im Einsetzungsaspekt zu nutzen (vgl. Malle 1993): Variable können als Platzhalter interpretiert werden, in die man Zahlen einsetzen kann. Termumformungen müssen sich unter jeder Einsetzung bewähren, indem sie die Aussageform der Gleichung nach Einsetzung in eine wahre Aussage überführen.

Lea beherrscht das Einsetzen von Zahlen für Variable, auch wenn sie sich (in Z50) zunächst erinnern muss, dass 10n für $10 \cdot n$ steht. Allerdings zeigt ihre Rückfrage in Z 48, dass das Einsetzen ihr im Kontext der von ihr gerechneten Termumformung nicht so nahe zu liegen scheint. Indem sie den eingesetzten Term auswertet, erhält sie mit „= 43" eine neue rechte Seite und scheint den Term 13n zunächst nicht mehr zu beachten. Das Gleichheitszeichen deutet sie hier als Aufforderung zum Ausrechnen des numerischen Terms, während sie die behauptete Gleichwertigkeit von 10n+3 zu 13n zu der Ungleichheit der Ergebnisse 43 und 52 nicht in Beziehung setzt. Die Vermutung, dass dies falsch sein müsse (Z54), entnimmt Lea vermutlich eher interaktionslogischen als sachlogischen Erwägungen: Es hätte keine weiteren Nachfragen gegeben, wenn nicht noch etwas nicht stimmen würde.

Die hier gewählte Förderstrategie, die behauptete formale Gleichwertigkeit der Terme 10n + 3 und 13n durch Einsetzen inhaltlich zu hinterfragen, kann bei Lea deswegen nicht greifen, weil ihr zwar der Einsetzungsaspekt für Variable an sich bekannt ist, nicht aber die Deutung der Gleichwertigkeit von Termen über den Einsetzungsaspekt: „das ist ja auch mit 4, nicht mit n".

Eine auf Nachhaltigkeit setzende langfristige Bearbeitung dieser Kalkül-Schwierigkeit müsste demnach an einer inhaltlichen Interpretation der Gleichwertigkeit von Termen ansetzen. Wer nur die Regeln des Kalküls kennt, hat keine vorstellungsbasierte Kontrollmöglichkeit für das formale Umformen.

Ähnliche Gesprächsverläufe sind zu einer zweiten Förderstrategie bekannt, die zur Verdeutlichung des Fehlers $(a+b)^2 \neq a^2+b^2$ im zweiten Beispiel nahezuliegen scheint, nämlich die Heranziehung einer graphischen Darstellung wie der nebenstehenden. Auch dieses Bild kann nur diejenigen überzeugen, die sich bewusst sind, dass im Gegenstandsaspekt der Variablen (vgl. Malle 1993) die Gleichwertigkeit zweier Terme als Beschreibungsgleichheit gedeutet werden kann: Zwei Terme sind dann gleichwertig, wenn sie dasselbe Bild beschreiben. Für Lernende wie Lea dagegen stehen die Umformungsregeln und die Beschreibungen unverbunden nebeneinander, die Verbindung zwischen inhaltlichem Denken und Kalkül müsste erst gezielter aufgebaut werden.



3.2. Inhaltliches Denken vor Kalkül, auch bei Termumformungen

Termumformungen nach dem Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül“ zu unterrichten, erfordert einen Perspektivwechsel vom Fokus auf die *Tätigkeit des Umformens auf Kalkülebene* hin zum *dahinterliegenden strukturellen Konzept*, der Gleichwertigkeit von Termen.

Wie im Abschnitt 3.1 bereits an Beispielen angeführt, kann Gleichwertigkeit von Termen je nach Interpretation der Variablen unterschiedlich gedeutet werden:

- *Umformungsgleichheit*: Werden die Variablen als interpretationslose Zeichen angesehen (Kalkülaspekt der Variablen, Malle 1993, S. 46), gelten zwei Terme als gleichwertig, wenn sie sich durch Termumformungsregeln ineinander überführen lassen.
- *Beschreibungsgleichheit*: Werden die Variablen als unbestimmte Zahlen oder Größen gedeutet (Gegenstandsaspekt der Variablen, Malle 1993, S. 46), so gelten zwei Terme dann als gleichwertig, wenn sie denselben Sachzusammenhang oder dasselbe Bild auf unterschiedliche Weise beschreiben.
- *Einsetzungsgleichheit*: Werden die Variablen als Platzhalter für das potenzielle Einsetzen von Zahlen gedeutet (Einsetzungsaspekt, vgl. Malle 1993, S. 46), so gelten zwei Terme dann als gleichwertig, wenn sie für jede Kombination eingesetzter Zahlen denselben Wert ergeben.

Während die Umformungsgleichheit also die kalkülorientierte Umsetzung der Gleichwertigkeit darstellt, bilden Einsetzungs- und Beschreibungsgleichheit die zentralen inhaltlichen Interpretationen, über die Lernende zunächst verfügen können sollten, bevor man zur Umformungsgleichheit übergeht. Die allgemeinen Konzepte Beschreibungsgleichheit und Einsetzungsgleichheit stellen die abstrakten Repräsentationen der Grundvorstellungen zur Gleichwertigkeit dar, während ein konkretes Bild mit zwei Termbeschreibungen die graphische Darstellung liefern könnte, eine konkrete Situation mit zwei Termbeschreibungen oder ein Zahlenbeispiel zur Einsetzungsgleichheit die Mustersituationen.

Ein (Lernschwierigkeiten antizipierender) Lernweg zur Gleichwertigkeit von Termen nach dem Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül“ sollte daher (in Parallelität zum Lernweg zur Gleichwertigkeit von Brüchen aus Prediger 2006) etwa so aussehen (Grundidee ähnlich bei Malle 1993, S. 239ff, Wellstein 1978):

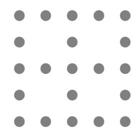
Termumformungen als kalkülmäßige Übergänge zu gleichwertigen Termen - Ein möglicher Lernweg

Lernende...

1. ... entdecken, dass es unterschiedliche Terme gibt, die dieselbe Situation oder dasselbe Bild mit allgemeinen Größen beschreiben (sie entdecken die Existenz beschreibungsgleicher Terme);
2. ... erfahren durch Ausprobieren, dass die Beschreibungsgleichheit die Einsetzungsgleichheit impliziert;

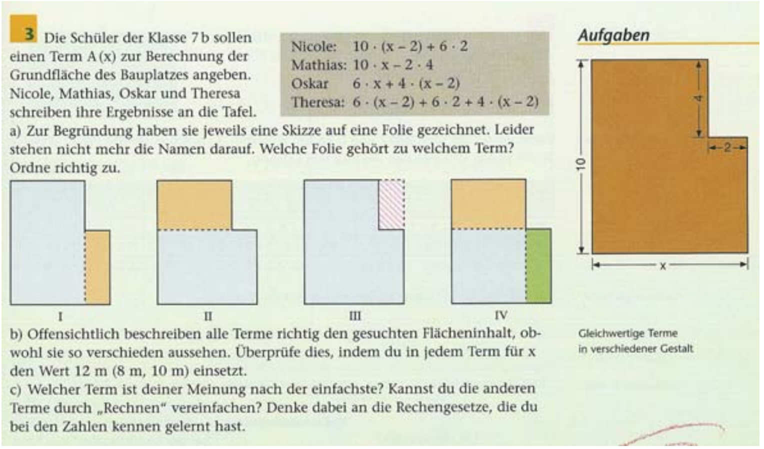
3. … finden zu einer Situation oder einem Bild mehrere beschreibungsgleiche Terme und überprüfen ihre Gleichwertigkeit mit der Einsetzungsgleichheit;
4. ... zeigen durch Konstruktion einer passenden Situation oder eines Bildes, dass zwei Terme gleichwertig sind;
5. ... suchen rechnerische Möglichkeiten, die Gleichwertigkeit zweier Terme schneller zu erkennen und entdecken Kommutativ- und Distributivgesetz als geeignete Möglichkeit, einem Term ein anderes Gesicht zu geben;
6. … formulieren und nutzen Termumformungsregeln als Möglichkeit, auf der Kalkül-Ebene zu gleichwertigen Termen überzugehen;
7. ... gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Überprüfen, dass inhaltliche und formale Ebene zusammenpassen;
8. … deuten auch später immer wieder die durch Termumformung gewonnenen Terme als beschreibungs- und einsetzungsgleich.

Dabei kommt es nicht darauf an, dass Lernende die verschiedenen Varianten des Konzeptes von Gleichwertigkeit benennen oder sogar analytisch auseinanderhalten können (dieses stoffdidaktische Meta-Wissen zu abstrakten Repräsentationen der Grundvorstellungen bleibt in der Regel der Lehrkraft vorbehalten), sondern dass an geeigneten Mustersituationen entsprechende Erfahrungen ermöglicht werden, wie etwa an den Beispielen im Beitrag von Berlin et al. (in diesem Band). Auch sie nutzen die Grundidee von Wellsteins (1978) nebenstehendem klassischem Beispiel eines Gitterpunkte-Bildes. Zum Bild passen z.B. die Terme $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3$ oder $5 \cdot 5 – 4$ u.v.a. Verallgemeinert man auf ein Raster mit Seitenlänge n (mit ungeradem n), so passen z.B. diese Terme $4n – 4 + 2(n-2)-1$ oder $3n + 3 (n-3)$ oder $6n -9$. Nun könnte für verschiedene n überprüft werden, ob diese Terme tatsächlich einsetzungsgleich sind.



Entscheidend ist, Vertrautheit mit den inhaltlichen Deutungen der Gleichwertigkeit aufzubauen, bevor der Übergang zum Kalkül begonnen wird. Dieser erfolgt idealerweise nach dem Prinzip der fortschreitenden Schematisierung (Treffers 1983), indem Lernende ihre inhaltlichen Denkwege bei der Suche gleichwertiger Terme sukzessive schematisieren und so entlang geeigneter Beispiele selbständig zu Umformungsregeln kommen. Auf diese Weise kann für Lernende die Idee und der Wert des Kalküls in dem fundamental wichtigen Sinne erlebbar werden, wie ihn Kirsch hervorgehoben hat: „Die Stärke der Algebra liegt ja zum großen Teil darin, dass inhaltliche Überlegungen durch kräfteschonende formale Operationen ersetzt werden können.“ (Kirsch 1991, S. 296)

In etwas gedrängter Form, aber geradezu idealtypischer Weise wird dieser Lernweg im Schulbuch Neue Wege 7 angebahnt (vgl. Abb. 8 aus Lergenmüller / Schmidt 2001, S. 161). Die Aufgabe zentriert sich um das Erleben der Beschreibungsgleichheit zu einer geometrischen Figur. Im Aufgabenteil a) wird durch Zuordnung der Terme zu den unterschiedlichen Strukturierungen der Figur die Beschreibungsgleichheit nachvollzogen (1. Schritt), in Aufgabenteil b) ihre Gleich-



3 Die Schüler der Klasse 7 b sollen einen Term A (x) zur Berechnung der Grundfläche des Bauplatzes angeben. Nicole, Mathias, Oskar und Theresa schreiben ihre Ergebnisse an die Tafel.

Nicole: $10 \cdot (x - 2) + 6 \cdot 2$
Mathias: $10 \cdot x - 2 \cdot 4$
Oskar $6 \cdot x + 4 \cdot (x - 2)$
Theresa: $6 \cdot (x - 2) + 6 \cdot 2 + 4 \cdot (x - 2)$

a) Zur Begründung haben sie jeweils eine Skizze auf eine Folie gezeichnet. Leider stehen nicht mehr die Namen darauf. Welche Folie gehört zu welchem Term? Ordne richtig zu.

I II III IV

b) Offensichtlich beschreiben alle Terme richtig den gesuchten Flächeninhalt, obwohl sie so verschieden aussehen. Überprüfe dies, indem du in jedem Term für x den Wert 12 m (8 m, 10 m) einsetzt.

c) Welcher Term ist deiner Meinung nach der einfachste? Kannst du die anderen Terme durch „Rechnen" vereinfachen? Denke dabei an die Rechengesetze, die du bei den Zahlen kennen gelernt hast.

Abb. 8: Lernwege von der Gleichwertigkeit zur Termumformung (Neue Wege 7)

wertigkeit mit Hilfe der Einsetzungsgleichheit überprüft (2./3. Schritt), der Übergang zum Kalkül wird durch Aufgabenteil c) angebahnt (5. Schritt). Gleichwohl ist der Aufgabenteil c) selbst für Gymnasiasten, aber besonders für leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler kein Selbstläufer, sondern bedarf weiterer Unterstützung.

Besonders herausfordernd für Lernende auf dem skizzierten Lernweg ist der 4. Schritt „…zeigen durch Konstruktion einer passenden Situation oder eines Bildes, dass zwei Terme gleichwertig sind". Denn diese Richtung der Übersetzungsprozesse erfordert nicht nur die in Abschnitt 1.2 diskutierten Grundvorstellungen von Operationen, sondern auch ein Verständnis der Rolle der Variablen in einer Funktionsgleichung. Wie schwierig dies ist, zeigen die in Abb. 9 abgedruckten Antworten von Realschülern der Klasse 9 auf den Auftrag, einen gegebenen Funktionsterm in eine Situation zurück zu übersetzen (aus Bronzel/Schmerder 2007).

Annikas und Bens Textaufgaben deuten darauf hin, dass ihnen die Rolle der Variablen in einem Funktionsterm gar nicht bewusst ist, sie können das x nicht mit 0,2 in Verbindung bringen. Clara dagegen hat fast alle wichtigen Elemente umgesetzt: Sie deutet die 5 als Anfangswert und die 0,2 als Änderung (vgl. Abschnitt 1.2), wenn auch die Richtung der Änderung und die Zeiteinheiten noch weiterentwicklungsbedürftig sind. Claras Frage „Nach wie vielen Minuten ist das Brett auseinander gesägt" zielt auf die Nullstelle der Funktion, nicht auf den Funktionsterm an sich. Ebenso findet Damian zwar eine prinzipiell tragfähige Situationen, die sich durch den Funktionsterm beschreiben lassen würde, doch zeigt auch seine Frage, dass er noch nicht ganz stabil formulieren kann, was der Funktionsterm an sich beschreibt.

Aufgabe: Denke dir zum Funktionsterm y = 0,2x + 5 eine passende Textaufgabe

Annika:
Du gehst in einen Supermakt und kaufst eine gewisse Anzahl von Gläsern mit einem Literinhalt von 0,2l
Du kaufst noch 5 Gläser dazu.
Wie viele hast du dann?

Clara:
Ein Freund von dir braucht Hilfe beim Umzug... Er bringt dir ein 5 m langes Brett, davon sägt er alle 5 Minuten 0,2 m ab.
Nach wie vielen Minuten ist das Brett auseinander gesägt?

Ben:
Sms kosten bei einem Telefonat von einem Handy y=10+0,2= 10,20€
Wieviel kostet bei einem Telefonat von einem Handy 5 min.
y=0,2x+5 = 5,2 €

Damian:
~~In einen~~ In ein Becken wird wasser gefüllt, ~~wo~~ das Wasser ist bereits 5dm hoch, alle 10 sec kommen 0,2 dm dazu, wann ist das Becken voll?

Abb. 9: Rückübersetzen als Herausforderung

Von insgesamt 57 Lernenden aus zwei schriftlich befragten neunten Realschulklassen haben 28 diese Aufgabe in einer Standortbestimmung erst gar nicht bearbeitetet, vermutlich aufgrund des unbekannten Aufgabenformats. Nur eine Antwort von 56 war vollständig richtig. 10 Lernende haben wie Clara und Damian richtige Ansätze mit Schwierigkeiten in der Durcharbeitung gehabt, und 18 haben die Aufgabe mit ähnlichen Fehlern gelöst wie Annika und Ben (Bronzel/Schmerder 2007).

Diese Ergebnisse zeigen, wie lose für viele die Verbindung von Term zu Situation sein kann. Gerade deswegen ist das Üben dieser Übersetzungen eine wichtige Voraussetzung, um Gleichwertigkeit und mithin Termumformungen zu verstehen.

Schlussbemerkung

Zusammenfassend lässt sich das Prinzip „Inhaltliches Denken vor Kalkül" charakterisieren durch

- den Aufbau tragfähiger und vielfältiger Grundvorstellungen durch geeignete Mustersituationen und Darstellungen als Basis inhaltlichen Denkens,
- das Verweilen im Inhaltlichen, bis Lernende selbst ein Bedürfnis nach denkentlastenden Abkürzungen durch Kalkül empfinden, und
- die konsequente Rückbindung an inhaltliche Denkweisen auch nach Einführung des Kalküls, und zwar bis zur Klassenarbeit.

Und dennoch: „Bei Ihnen müssen wir immer so viel denken, können wir nicht einfach mal nur rechnen? Das ist weniger anstrengend!" Diesen Vorwurf muss sich durchaus anhören, wer inhaltliches Denken bis zum Schluss ernst nimmt, denn in der Tat ist das zeitweise Abweichen vom denkentlastenden Kalkül auch mühevoll.

Dass sie diese Mühe trotzdem lohnt, zeigen zahlreiche Unterrichtserfahrungen und empirische Untersuchungen, weil die mathematischen Kenntnisse nachhaltiger erworben und behalten werden können, wenn sie auf Verständnis gründen.

Literatur

Baruk, S. (1989): Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik. Basel: Birkhäuser.

Bender, P. (1991): Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen der Sekundarstufen. In: Postel, H. / Kirsch, A. / Blum, W. (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen, Festschrift für Heinz Griesel. Hannover: Schroedel, S. 48-60.

Blum, W. / vom Hofe, R. / Jordan, A. / Kleine, M. (2004): Grundvorstellungen als aufgabenanalytisches und diagnostisches Instrument bei PISA. In: Neubrand, M. (Hrsg.): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000, Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften, S. 145-157.

Böer, H. et al. (2007): mathe live 7, Mathematik für Sekundarstufe I. Stuttgart: Klett. (Neubearbeitung zu Emde et al. 2000)

Borneleit, P. / Danckwerts, R. / Henn, H.-W. / Weigand, H.-G. (2001): Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In: Journal für Mathematikdidaktik 22 (1), S. 73-90.

Bronzel, M. / Schmerder, I. (2007): Schülervorstellungen zur Darstellung von Funktionen. Unveröffentlichter Seminarbericht, betreut von S. Prediger, IEEM, Universität Dortmund.

Cooper. B. / Dunne, M. (2000): Assessing Children's Mathematical Knowledge: Social Class, Sex and Problem-Solving. Buckingham: Open University Press.

Emde, C. et al. (2000): Mathe live - Mathematik für Sekundarstufe I, 7. Schuljahr. Stuttgart: Klett.

Gerster, H.-D. / Schultz, R. (2004): Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Online publizierter Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen. 2. Auflage, PH Freiburg. Online unter http://opus.bsz-bw.de/phfr/volltexte/2007/16/pdf/gerster.pdf [9.9.2008]

Grassmann, M. (1993): Inhaltliches Verständnis als Leitgedanke des Arithmetikunterrichts. In: Mathematik in der Schule 31(3), S. 130-134.

Hefendehl-Hebeker, L. (1989): Erfahrungen mit den negativen Zahlen im Gymnasium. In: Mathematik lehren 35, S. 48-58.

Hefendehl-Hebeker, L. / Prediger, S. (2006): Unzählig viele Zahlen. Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. In: Praxis des Mathematikunterrichts in der Schule 48(11), S. 1-7.

Huinker, De A.M. (1993): Interviews: A window to students` conceptual knowledge of the operations. In: Webb, N.L. / Coxford, A.F. (Hrsg.): Assessment in the mathematics classroom. 1993 Yearbook, Reston: National Council of Teachers of Mathematics, S. 80-86.

Kaiser, G. / Schwarz, I. (2008): Mathematiklernen bei einer sprachlich und kulturell heterogenen Schülerschaft. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 493-496. online unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem → BzMU

Kirsch, A. (1991): Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. In: Didaktik der Mathematik 19(4), S.294-308.

Lergenmüller, A. / Schmidt, G. (2001): Mathematik Neue Wege 7. Arbeitsbuch für Gymnasien, Jahrgangsstufe 7. Braunschweig: Schroedel.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. In: Mathematik lehren 123, S. 4-8.

Moser Opitz, E. (2007): Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern. Bern u.a.: Haupt.

Prediger, S. (2006): Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. In: Praxis der Mathematik in der Schule 48 (2006) 11, S. 8-12.

Prediger, S. (2008a): Discontinuities for mental models: A source for difficulties with the multiplication of fractions. In: De Bock, D. / Søndergaard, B. / Gómez, B.A. / Cheng, C.C.L. (Hrsg.): Proceedings of ICME-11 – Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic, Mexico, Monterrey, S. 29-37.

Prediger, S. (2008b): Verstehen durch Vorstellen. Inhaltliches Denken von der Begriffsbildung bis zur Klassenarbeit und darüber hinaus, erscheint in: Leuders, T. / Hefendehl-Hebeker, L. / Weigand, H.-G. (Hrsg.): Mathemagische Momente. Berlin: Cornelsen, S. XXXX?.

Prediger, S. / Matull, I. (2008): Vorstellungen und Mathematisierungskompetenzen zur Multiplikation von Brüchen - Empirische Überprüfung eines Schichtenmodells zum Konzeptwechsel, Abschließender Forschungsbericht der DFG-geförderten Studie „Schichtung von Schülervorstellungen“, IEEM, TU Dortmund.

Prediger, S. / Wittmann, G.. (2009): Aus Fehlern lernen - (wie) ist das möglich? Erscheint in: Praxis der Mathematik in der Schule 27(51), S. 1ff.

Prenzel, M. / Artelt, C. / Baumert, J. / Blum, W. / Hammann, M. / Klieme, E. / Pekrun, R. (2007) (Hrsg.): PISA 2006. Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie - Zusammenfassung, online unter http://pisa.ipn.uni-kiel.de/zusammenfassung_ PISA2006.pdf [25.9.2008]

Schukajlow, S. / Leiß, D. (2008): Textverstehen als Voraussetzung für erfolgreiches mathematisches Modellieren – Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S. 95-98. online zugreifbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem → BzMU

Schütte, S. (1993): Muss ich jetzt plus, minus, mal oder geteilt rechnen. Von einigen Schwierigkeiten, die Mädchen mit Textaufgaben haben und was wir daraus lernen können. In: Mathematische Unterrichtspraxis 14(2), S. 17-28.

Schütte, S. (2001): Rechengeschichten statt Textaufgaben: Mathematik und Sprache verbinden. In: Selter, C. / Schipper, W. (Hrsg.): Offener Mathematikunterricht: Mathematiklernen auf eigenen Wegen. Sonderausgabe der Grundschulzeitschrift, S. 54-59.

Tietze, U.-P. (1988): Schülerfehler und Lernschwierigkeiten in Algebra und Arithmetik - Theoriebildung und empirische Ergebnisse aus einer Untersuchung. In: Journal für Mathematikdidaktik 9(2/3), S. 163-204.

Treffers, A. (1983): Fortschreitende Schematisierung. In: Mathematik lehren 1, S. 16-20.

Usiskin, Z. (2008): The Arithmetic Curriculum and the Real World. In: De Bock, D. / Søndergaard, B.D. / Gómez, B.A. / Cheng C.C.L. (Hrsg.): Proceedings of ICME-11 – Topic Study Group 10, Research and Development of Number Systems and Arithmetic. Mexiko, S. 9-16.

Verschaffel, L. / Greer, B. / De Corte, E. (2000): Making sense of word problems. Lisse: Swets & Zeitlinger.

vom Hofe, R. (1992): Grundvorstellungen mathematischer Inhalte als didaktisches Modell. In: Journal für Mathematikdidaktik 13(4), S. 345-364.

vom Hofe, R. (2003): Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: Mathematik lehren 118, 4-8.

Wellstein, H. (1978): Abzählen von Gitterpunkten als Zugang zu Termen. In: Didaktik der Mathematik 6(1), 54-64.