Konzeptionelles zu **Funktionen**

Mit dem Funktionsbegriff sind drei Grundvorstellungen verbunden
- *Zuordnungs-Vorstellung* – Eine Größe wird einer anderen eindeutig zugeordnet. Typische Frage: Welches f(x) gehört zu x?
- *Kovariations- oder Änderungs-Vorstellung* – Verändert sich die eine Größe, so verändert sich die zugeordnete Größe in bestimmter Weise. Typische Frage: Wie wirkt sich die Änderung von x auf f(x) aus?
- *Objekt-Vorstellung* – Eine Funktion wird als Ganzes, als eigenständiges mathematisches Objekt sui generis betrachtet. Typische Tätigkeit: Verkettung von Funktionen[1].

Wir beschäftigen uns hier vorwiegend mit den ersten beiden Aspekten.

Man sollte beim Stichwort Funktionsuntersuchungen nicht sofort an die traditionellen "Kurvendiskussionen" des 11. Schuljahres denken, weil Funktionsuntersuchungen schon viel früher möglich und nötig sind. Sie bilden einen roten Faden (= zentrale Idee) durch die gesamte Schulmathematik.

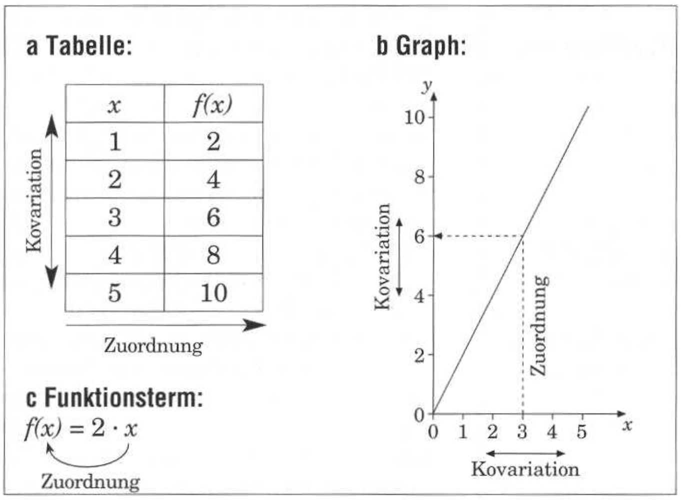

Abb. 1: Tabelle, Graph und Funktionsterm enthalten beide Aspekte

Von "Funktionsuntersuchung" kann man in einem weiten und in einem engeren Sinne sprechen. Im weiten Sinne versteht man unter einer "Funktionsuntersuchung" die Untersuchung einer Abhängigkeit zwischen Größen, wobei dieser Prozess in zwei Teilprozesse zerfällt.
Im ersten Schritt wird die zu untersuchende Abhängigkeit dargestellt (zum Beispiel als Tabelle, Formel, Graf, Flussdiagramm, ...).
Im zweiten Schritt erfolgt eine Interpretation dieser Darstellung, das heißt, aus ihr wird Bestimmtes herausgelesen und in der jeweiligen Situation gedeutet.
In einem engeren Sinne wird unter einer "Funktionsuntersuchung" nur der zweite Schritt, also die Interpretation einer vorliegenden Darstellung verstanden.
Wir gehen von dem weiteren Sinn der "Funktionsuntersuchung" aus.

Schwerpunkte bis zum 8. Schuljahr
Im Schulalltag kommt das Arbeiten mit Tabellen, Formeln und Grafen viel zu selten vor. Schülerinnen und Schüler sollten im Unterricht vor allem lernen
- solche Darstellungen anzufertigen,
- vorliegende Darstellungen in andere zu übersetzen und
- die Darstellungen in der jeweils zugrunde liegenden Situation zu interpretieren (das heißt aus ihnen möglichst viel herauszulesen).

[1] In der Sekundarstufe I meint man möglicherweise diesen Aspekt gar nicht zu berühren, aber bereits das Beispiel Anhalteweg mit seinen Teilen Vorbremsweg + Bremsweg zeigt, dass hier Funktionen zusammengesetzt werden und dabei beide Objekte grafisch, in der Tabelle und in der Funktionsvorschrift gut darstellbar sind.

Tabellen können bereits in der Primarstufe behandelt werden, bei Grafen, aber auch bei Formeln plädieren wir mit Malle für eine frühe und fortschreitende Einführung ab dem 5. Schuljahr. Im 5. bis 8. Schuljahr ist keine "abstrakte Funktionenlehre" notwendig. Nicht einmal das Wort "Funktion" muss fallen, geschweige "Funktionsuntersuchung".
Es genügt, wenn Abhängigkeiten von Größen in bedeutungshaltigen Situationen untersucht werden. Beispiele sind die Abhängigkeit eines Preises von der Warenmenge, eines zurückgelegten Weges von der Zeit oder des Kreisflächeninhaltes vom Radius.
Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler lernen, Tabellen, Formeln, Grafen und gegebenenfalls weitere Darstellungen anzufertigen und in der jeweiligen Situation zu interpretieren.
Dies reicht für die Bedürfnisse des Alltagslebens aus, denn im Alltag geht es nicht um abstrakte Funktionen, sondern um Abhängigkeiten inhaltlich deutbarer Größen.
In dieser Phase

- soll der "*semantische Hintergrund*" zum späteren Funktionsbegriff erworben werden,
- der in erster Linie aus *intuitiven Vorstellungen* und
- *vorbegrifflichem Handlungswissen* in Bezug auf Abhängigkeiten besteht.

Erst wenn dieser Hintergrund vorhanden ist, hat es einen Sinn, ab dem 8./9. Schuljahr eine formalere und kalkülhaftere Funktionenlehre zu entwickeln, in der die auftretenden Variablen nicht mehr zwangsläufig inhaltlich gedeutet werden.
Wir plädieren also dafür einer solchen inhaltlich-semantischen Vorphase mehr Raum zu geben und nicht zu schnell auf die abstrakt-formale Ebene aufzusteigen. Das verstehen wir als Grundvorstellungen entwickeln und sehen uns hier in einer Linie mit den mathematical-literacy-Konzepten in TIMSS und PISA.

Zwei Aspekte beim Interpretieren

Jede Funktion weist zwei fundamentale Aspekte auf:
Zuordnung: Jedem x wird genau ein f(x) zugeordnet.
Kovariation: Wird x verändert, so ändert sich f(x) in einer bestimmten Weise und umgekehrt.
Der Ausdruck "Kovariation" (engl. "covariation") ist in der deutschsprachigen Literatur eher unüblich, wird aber in der jüngeren amerikanischen Literatur häufig verwendet. Er drückt in recht einprägsamer Weise aus, worum es geht, nämlich um ein "Ko-Variieren", das heißt "Miteinander-Variieren" der beiden Variablen. In der deutschen Literatur entspricht dieser Begriff in etwa dem Begriff "Funktionales Denken" im Sinne Felix Kleins beziehungsweise dem Begriff "systematische Veränderung" im Sinne Vollraths.
Beim Zuordnungsaspekt wird die Funktion jeweils nur lokal betrachtet, beim Kovariationsaspekt ist eine globalere Sichtweise der Funktion notwendig.

Wo treten die Aspekte auf?

Beide Aspekte sind praktisch immer präsent. Man kann sie an jeder Darstellung einer Funktion erkennen – manchmal besser, manchmal schlechter. Man kann etwa eine Tabelle "waagerecht" (zeilenweise) lesen und kann dabei für jedes x das zugeordnete f(x) ermitteln (Zuordnungsaspekt). Man kann sie aber auch "senkrecht" (spaltenweise) lesen und dabei ermitteln, wie sich f(x) verändert, wenn sich x in einer bestimmten Weise ändert (Kovariationsaspekt). Auch an einem Grafen kann man einerseits für ein bestimmtes x das zugeordnete f(x) ablesen (Zuordnungsaspekt), andererseits kann man aber auch erkennen, wie sich f(x) ändert, wenn sich x in bestimmter Weise ändert (Kovariationsaspekt). Sogar an einer Formel können Geübte beide Aspekte erkennen. Allerdings ist nur der Zuordnungsaspekt direkt zu sehen, der Kovariationsaspekt muss indirekt erschlossen werden. Hier sind einige typische Fragestellungen aufgeführt, die jeweils auf einen dieser beiden Aspekten abzielen:

Typische Fragen zum Zuordnungsaspekt:
- Welches f(x) gehört zu einem bestimmten x?
- Welches x gehört zu einem bestimmten f(x)?

Typische Fragen zum Kovariationsaspekt:
- Wie ändert sich f(x), wenn x wächst?
- Wie muss sich x ändern, damit f(x) fällt?
- Wie ändert sich f(x), wenn x verdoppelt wird?
- Wie muss x geändert werden, damit sich f(x) verdreifacht?
- Wie ändert sich f(x), wenn x um 1 erhöht wird?
- Wie muss x geändert werden, damit f(x) um 2 erniedrigt wird?

Können empirische Befunde uns weiter bringen?
Empirische Untersuchungen zeigen, dass im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt unterentwickelt sind. Besondere Defizite sind in Hinblick auf den Kovariationsaspekt zu verzeichnen, der oft so gut wie nicht verfügbar ist.
Es zeigt sich sehr deutlich, dass Versuchspersonen im Falle einer situativen Einkleidung eher den Kovariationsaspekt aufgreifen als im abstrakten Fall. Zum Beispiel beschreiben sie den jeweiligen Grafen im ersten Fall eher mit Termini wie "Wachsen", "Fallen", "Zunehmen", "Abnehmen", "Höhepunkt", "Verdoppeln", "rasches Ansteigen", "langsames Abnehmen", während im abstrakten Fall solche Beschreibungen kaum vorkommen. Man kann daraus folgern, dass der Kovariationsaspekt in situativen Einkleidungen leichter erwerbbar ist als im Rahmen einer abstrakten Funktionenlehre (am leichtesten geht es bei zeitabhängigen Größen).
Was im 5. bis 8. Schuljahr versäumt wird, ist ab dem 8./9. Schuljahr nur mehr schwer aufzuholen. Es sollte im 5. bis 8. Schuljahr dafür gesorgt werden, dass sich im Bewusstsein der Schülerinnen und Schüler sowohl der Zuordnungsaspekt als auch der Kovariationsaspekt entwickelt – und zwar im Zusammenhang mit inhaltlichen Interpretationen von Funktionsgrafen. Fehlen diese Aspekte, wird jede Weiterarbeit in einer abstrakten Funktionenlehre nur ein "sinnleeres Gerede ohne intuitiven Hintergrund".

Literatur
Günther Malle, Funktionen untersuchen – ein durchgängiges Thema, und
ders., Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnungen und Kovaration,
beide in: mathematik lehren, Heft 103, 12/2000