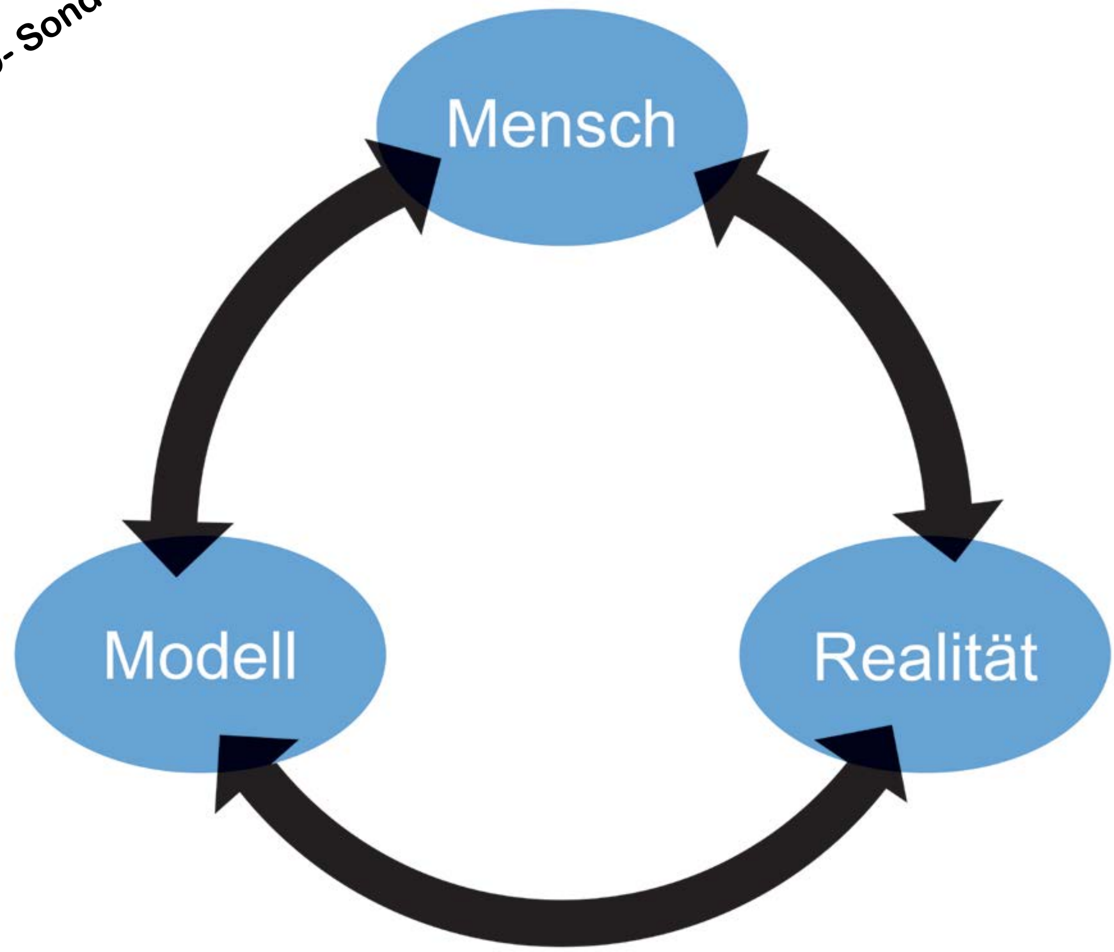
Jürgen Maaß

Modellieren in der Schule

Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts

MUED- Sonderausgabe



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Schriften zum Modellieren und zum Anwenden von Mathematik 5

**Schriften zum Modellieren
und zum
Anwenden von Mathematik**

Herausgegeben von
Stanislaw Schukajlow-Wasjutinski

Band 5

Jürgen Maaß

Modellieren in der Schule

Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des
realitätsbezogenen Mathematikunterrichts

WTM

Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

ISBN 978-3-942197-83-0

Inhalt

Vorwort

Viele gute Gründe sprechen dafür, neben anderen Schwerpunkten auch *realitätsbezogenen* Mathematikunterricht in den Schulen anzubieten. Hier deute ich nur die beiden wichtigsten Gründe an: Auf der einen Seite verspricht der Realitätsbezug eine überzeugende und motivierende Antwort auf die typische Frage von Schülerinnen und Schülern: „Wozu sollen wir Mathematik lernen?“ Auf der anderen Seite gibt es durch entsprechende Ausrichtungen internationaler Vergleichstests, Lehrpläne und Kompetenzkataloge einen spürbaren bildungspolitischen Willen in dieser Richtung. Das Modellieren von Realität und das Simulieren ausgewählter Aspekte der Realität sind selbstverständliche Säulen eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts.

Aus dem Scheitern der „Neuen Mathematik“, die ja auch von einem solchen staatlichen Willen zu einer Neuorientierung des Mathematikunterrichtes vorangetrieben wurde, ist unter anderem zu lernen, wie wichtig es ist, die Lehrkräfte zu überzeugen und zu qualifizieren, selbst einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht halten zu wollen und zu können. Wie kann es gelingen, in der Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrkräften in dieser Richtung zu wirken? Dieses Buch ist ein Bestandteil einer Antwort, ein Buch zum Verstehen, Mitmachen, Ausprobieren und zur Motivation, kurz: ein Lernbuch!

Selbstverständlich kann ein einzelnes Buch nicht eine Garantie für die Erfüllung aller Wünsche rund um eine Verbesserung des Mathematikunterrichts sein. Aber es kann mehr erreichen als nur eine Information zum Thema zu liefern. Wie? Dieses Buch weicht vom im Mathematikstudium üblichen Aufbau (Stichwort: Vorratslernen) ab und setzt didaktische Erkenntnisse in der Strukturierung und in der Art des Schreibens sowie des Umgangs mit dem Inhalt um. Das ist keinesfalls üblich; vor vielen Jahren schon kritisierte Heinz Hülsmann im Gespräch ganz zu Recht die Anonymität der Didaktik im Schreiben über Didaktik. In diesem Buch ist offensichtlich, dass Didaktik nicht nur beschrieben, sondern reflektiert zur Aufbereitung des Inhaltes eingesetzt wird.

Danksagung

Ein Buch wie dieses beruht auf vielen Erfahrungen, auf intensiver Beschäftigung mit der Thematik und auf Kooperation mit Kolleginnen und Kollegen und auf ganz konkreter Unterstützung insbesondere beim Korrekturlesen.

Viele Lehrerinnen und Lehrer, Studentinnen und Studenten ermöglichten es mir, Einblick in ihre Sicht eines „guten“ Mathematikunterrichts zu gewinnen, zu dem je nach Ausgangsposition und eigener Erfahrung Modellieren gehört oder auch nicht. In vielen Diskussionen im Rahmen von Fortbildungsveranstaltungen für Lehrerinnen und Lehrer sowie Lehrveranstaltungen zur Fachdidaktik der Mathematik konnte ich etwas darüber lernen, welche Argumente oder Beispiele meinerseits mehr oder weniger überzeugend waren.

Ich bin Gründungsmitglied von MUED (www.mued.de) und ISTRON (http://userpages.uni-koblenz.de/~mathe/istron/istron_web/). MUED wie „Mathematik-Unterrichts-Einheiten-Datei“ ist eine Gruppe hauptsächlich von Lehrerinnen und Lehrern, die gern realitätsbezogen unterrichten – und auf Tagungen, per Internet und in vielen persönlichen Diskussionen darüber kommunizieren, wie sich was am besten unterrichten lässt. Meine Eindrücke über die Realität des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts beruhen hauptsächlich auf den Erfahrungen der „MUEDen“ Lehrerinnen und Lehrern (die meist voller Energie sind).

„Seit 1991 gibt es – als Teil dieses Netzwerkes – eine deutsch-österreichische ISTRON-Gruppe. Sie gibt diese Schriftenreihe heraus. Ihr gehören derzeit etwa sechzig Personen an: Lehrende aus Schulen und Hochschulen, Curriculumsentwickler, Schulbuchautoren, Lehrerfortbilder, Zeitschriftenherausgeber. Die Gruppe hat – ganz im Sinne der Netzwerk-Idee – wechselseitige Verbindungen sowohl mit Lehrenden auf lokaler und regionaler Ebene als auch mit der internationalen ISTRON-Gruppe. Zu den Aktivitäten der Gruppe gehören (neben dieser Schriftenreihe) die Dokumentation und Entwicklung von schulgeeigneten Materialien zum realitätsorientierten Lehren und Lernen von Mathematik sowie alle Arten von Anstrengungen, solche Materialien in die Schulpraxis einzubringen –

durch Lehreraus- und -fortbildung, über Schulbücher und Lehrpläne sowie natürlich vor allem durch direkte Arbeit vor Ort mit Lernenden." (http://userpages.uni-koblenz.de/~istron/home/?page_id=5)
ISTRON eröffnete mir einen wissenschaftlichen Blick aufs Thema.

Mein ganz persönlicher Dank gilt Prof. Dr. Stefan Siller (derzeit Universität Koblenz), mit dem zusammen ich als Autor und Herausgeber von vielen Beiträgen zu der ISTRON Schriftenreihe auch ein wenig zur Entwicklung von ISTRON beitragen konnte. Insbesondere das 6. Kapitel dieses Buches zum Thema Sportwetten und Wettbetrug als Beispiel für ein umfassendes und facettenreiches realitätsbezogenes Projekt beruht auf gemeinsamen Arbeiten, die wir z.T. in ISTRON Bänden veröffentlicht bzw. auf ISTRON Tagungen vorgetragen haben. Ich bin sicher, dass wir auch in Zukunft an diesem und anderen Themenkreisen gemeinsam weiter arbeiten werden. Nicht zuletzt danke ich ihm dafür, dass er das ganze Buch Korrektur gelesen und mir wertvolle Anregungen zur Gestaltung gegeben hat.

Mein Dank für Grafiken zur Modellierungen auf dem Cover und im Exkurs am Ende des Buches gilt Frau Lea Gahleitner; mein Dank für das Textlayout gilt Frau Silvia Kern.

Anschließend noch eine Anmerkung zu Bildrechten

Eine Reihe von Menschen lebt davon, Fotos zu machen, die dann z.B. im Sportteil oder im Lokalteil einer Zeitung oder in einem anderen Medium abgebildet sind oder Grafiken zu erstellen, die gedruckt oder elektronisch gespeichert im Internet zu finden sind. Um die Arbeit dieser Menschen zu schützen, gibt es rechtliche Regelungen für die Wiedergabe von Bildern, Fotos, Grafiken etc. in Büchern, die insbesondere ins Blickfeld gerückt sind, seit diese Bücher als .pdf file im Internet zum Download bereit stehen. In einigen Fällen (z.B. bei Kolleginnen oder Kollegen von Bildungseinrichtungen) freuen sich die Autorinnen und Autoren, wenn ihre Bilder und Grafiken auch in Büchern zu finden sind, in anderen Fällen (konkret: in mehr kommerziellen Zusammenhängen) kostet die Verwendung von Bildern etc. viel Geld.

Am einfachsten wäre es, ganz auf Bilder zu verzichten, aber manchmal sagt ein Bild wirklich mehr als 1000 Worte. In diesem Buch wird deshalb auf kommerzielle Bilder, Grafiken etc. mit einem LINK ins Internet verwiesen; Computergrafiken wurden selbst erstellt und einige Bilder von Kolleginnen und Kollegen mit ihrer ausdrücklichen Erlaubnis verwendet. Wozu die LINKS? Wenn Ihnen die Bildbeschreibung im Text nicht reicht, um die Argumentation zu einzu„sehen“ oder Sie einem Hinweis für ein mögliches Arbeitsblatt für so beachtenswert halten, dass Sie ihm nachgehen wollen, können Sie leicht dem LINK folgen. Nehmen wir als Beispiel dafür ein Arbeitsblatt zum Goldenen Schnitt, das ein Bild des Leipziger Rathauses zur Analyse vorschlägt. Bilder vom Rathaus gibt es viele; ein eigenes Bild haben wir leider nicht.

Kapitel 1: Einleitung

Was ist überhaupt Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht? Weshalb soll ich als Mathematiklehrerin oder Lehrer realitätsbezogenen Mathematikunterricht halten? Wie geht das? Was kann ich tun, wenn meine Schülerinnen und Schüler das nicht können oder wollen? Wie fange ich einfach an? Was sind Beispiele für größere Unterrichtseinheiten? Wo finde ich mehr Beispiele?

Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung dessen, was in der Mathematikdidaktik als „Modellierungskreislauf" bekannt ist, der Weg vom Wunsch, etwas besser zu verstehen oder zu verändern über die Auswahl der wichtigen Informationen und Ziele über die Verwendung von Mathematik zum Rückbezug auf die Ausgangssituation und ein mehrmaliges Beschreiten dieses Weges bis hin zum erwünschten Abschluss oder der Einsicht, dass es so mit vertretbarem Aufwand nicht geht. Im letzten Kapitel dieses Buches finden Sie einen eigenen Exkurs zum Thema Modellierungskreislauf.

Am Anfang steht eine Entscheidung: der Wunsch, etwas zu erkennen, besser zu verstehen, zu verändern, schneller zu erreichen, mit wenig(er) Aufwand zu steuern oder Ressourcen möglichst effizient einzusetzen können als Motivation dienen. Nachdem wir einen Aspekt der Realität ausgewählt haben, den wir genauer mit mathematischen Methoden betrachten wollen und können, suchen wir Daten und Gesetzmäßigkeiten, mit denen diese Daten verknüpft sind. Zu Beginn sind meist nicht alle notwendigen Daten vorhanden und nicht immer ist klar, in welcher Weise die Daten mit Hilfe des mathematischen Werkzeugkastens strukturiert werden können bzw. durch einen mathematischen Zusammenhang dargestellt oder beschrieben werden können.

Im ersten Durchlauf starten wir deshalb oft mit Schätzungen und sehr einfachen Mathematisierungen. Es werden zunächst (mathematische) Modelle erstellt von denen bekannt ist, dass sie keinesfalls alle Parameter berücksichtigen. Trotzdem werden wir schon bald Berechnungen anstellen, damit wir sowohl das Ergebnis als auch den Weg dahin interpretieren können. Die Interpretation wird uns in verschiedene Richtungen führen.

Die ersten Ergebnisse führen meistens zu Kopfschütteln: entweder ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend oder es drängt sich der Eindruck auf, dass weitere Bemühungen um die aufgegriffen Fragestellung nicht lohnenswert sind. Üblicherweise sind wir mit den Ergebnissen nicht zufrieden und können aus der Interpretation des ersten Anlaufes schließen, wie weiter vorgegangen werden soll.

Typische Fragestellungen, die daraus resultieren, sind Fragen nach genaueren oder zusätzlichen Daten, nach komplexeren mathematischen Werkzeugen oder die Frage nach Präzisierung der Fragestellung bzw. der Zielsetzung. Sobald eine oder mehrere dieser Fragen durchdacht sind, wird ein zweiter Versuch durchgeführt, dessen Ergebnis wiederum interpretiert werden muss.

Analog zu dem ersten Durchgang müssen wir entscheiden, ob und wie es weiter geht. Nach einigen Durchgängen haben wir mit genügend großer Genauigkeit herausgefunden, was wir wissen wollten oder merken, dass wir trotz aller Bemühungen nicht weiter kommen, weil z. B. bessere Daten nicht zugänglich sind, mathematische Darstellungen unsere kognitiven Fähigkeiten übersteigen oder wir schlicht den Eindruck haben, dass weitere Bemühungen sich nicht mehr lohnen, weil der Arbeitsaufwand zu groß wird.

Das ist jedoch das tägliche Brot eines Mathematikers bzw. einer Mathematikerin in Industrie und Wirtschaft und zeigt, dass viele Details erst (mühsam) erarbeitet werden müssen. Darauf wollen wir im nächsten Schritt genauer eingehen und Sie einladen, eine erste (einfache) Modellierungsaufgabe mit uns zu bearbeiten: Suchen sie ein aktuelles Werbeangebot für einen *Handyvertrag* und überprüfen Sie, ob dieser tatsächlich so günstig ist, wie es in der Werbung vorgegeben wird.

Mathematisches Modellieren anhand einer konkreten Idee – Handytarif

Am Anfang steht die Idee, ein vorhandenes Handy (oder ein neues Smartphone mit noch mehr technischen Möglichkeiten) möglichst preisgünstig nutzen zu können. Unterrichtseinheiten zu diesem Beispiel sind mehrfach publiziert worden (z.B. Fries u.a. 2004 oder http://www.blikk.it/angebote/modellmathe/ma0219_arb4.htm). Wir bereiten dieses Thema interaktiv auf. Viele Schritte sind bereits vorgegeben. Zu Beginn des mathematischen Modellierens sind jedoch solche Ideen in der Realität noch nicht vorhanden. Das wollen wir uns an einer ersten Aufgabe klar machen:

> Suchen Sie sich ein aktuelles Werbeangebot genauer an. Falls Sie schon aus Prinzip keine Werbung zur Kenntnis nehmen, schauen Sie bitte ins Internet, z.B. auf eine Seite wie http://www.handy-tarife.at/
> oder http://www.handytarifvergleich-xxl.de/ für Deutschland. (für Österreich: http://www.mobilfunkrechner.de/akwien/pdf/mobilfunknetz.pdf)

Sind Sie – wie wir – erstaunt über die Fülle an Informationen und Details in den Angeboten? Dann brauchen Sie ebenso wie wir und später ihre Schülerinnen und Schüler einen *Filter* für die Informationsflut. Es sollen möglichst wenige und klare Kriterien gefunden werden, um all die Informationen in die zwei Kategorien „wichtig“ und „unwichtig“ zu sortieren.

Deshalb werden Sie uns vermutlich zustimmen, wenn wir an dieser Stelle mit Nachdruck darauf hinweisen, dass am Beginn einer gelungenen Modellierung eine möglichst gute Präzisierung der Zielsetzung stehen soll. Je vager die Ziele sind, desto unklarer ist, welche Informationen zur Erreichung benötigt werden. Eine möglichst präzise Zielsetzung hilft sehr bei allen Entscheidungsfragen, die im Laufe der Arbeit auftreten: Soll dieser Aspekt auch noch berücksichtigt werden? Muss nicht darauf geachtet werden, dass...?

Nun werden Sie vielleicht einwenden, dass Forschung (und Modellierung ist immer ein Erforschen des Unbekannten) immer versucht, etwas noch nicht Bekanntes herauszufinden. Deshalb kann man a priori auch nicht immer sagen, wo das Ziel zu finden ist. Oder noch schärfer: Wenn man das Ziel vorher genau kennt, ist die halbe Arbeit schon geleistet.

Dieser Einwand trifft fast zu!

Der Forschungsprozess im Allgemeinen und der Prozess der mathematischen Modellierung im Besonderen haben eine wichtige Eigenschaft, die in den nachträglichen Berichten über Erfolge oft nicht erwähnt wird: Sie gehen schrittweise vor, auf eine erste Zielsetzung folgen erste Schritte. Aus den Erfolgen und Misserfolgen auf dem zunächst eingeschlagenen Weg soll und kann gelernt werden.

Ein Teil des Lernprozesses ist die Möglichkeit, aufgrund bisher erworbenen Wissens über die Zielsetzung etwas mehr und präzisere Aussagen zu treffen. Gerade im Bereich der technischen Entwicklung gibt es immer wieder Grenzen (durch Naturgesetze, Materialeigenschaften etc.), die so nicht überschritten werden können.

Im fiktiven Handyprojekt bestimmen Sie Ihre eigene Zielsetzung! Wollen Sie für das Telefonieren möglichst wenig Geld ausgeben? Wollen Sie für eine einigermaßen genau bestimmte Anzahl von Gesprächen weniger als bisher ausgeben? Wollen Sie zusätzliche Dienste in Anspruch nehmen? Wollen Sie immer erreichbar sein und häufig telefonieren oder brauchen Sie nur eine Verständigungsmöglichkeit für Notfälle?

> *Haben Sie ein wenig über Ihre Ziele nachgedacht? Schreiben Sie bitte auf, was Sie sich dazu überlegt haben. Vergleichen Sie diese Aufzeichnung später mit dem (vorläufigen) Resultat.*

Nun geht es direkt zur zweiten Aufgabe:

Überlegen Sie bitte, welche Daten Sie brauchen, um einen beworbenen oder aus dem Internet herausgewählten Tarif mit Ihrem aktuellen Tarif zu vergleichen. Notieren Sie dazu bitte Stichworte.

Auf den ersten Blick mag es mühsam erscheinen, das Stichwort „Daten zu meiner aktuellen Handynutzung“ aufzuschreiben, aber diese aktive Mitarbeit an einem ersten konkreten Beispiel in diesem Buch soll ja Ihnen (und ganz analog Ihren Schülerinnen und Schülern) zeigen, wie sich das abstrakt skizzierte Modellieren an einem relevanten Beispiel tatsächlich durchführen lässt. Die Notizen vom Start ab sind sehr nützlich, wenn zwischendurch und abschließend darüber nachgedacht werden soll, was bisher auf welchem Weg erreicht wurde und was daraus für diese oder andere Modellierungen gelernt werden kann.

Haben Sie Ihre letzte Handyrechnung gefunden? Dort steht neben dem Endbetrag auch noch mehr oder weniger detailliert aufgelistet, welche Gespräche in welche Tarifzonen Sie geführt haben, wie viele SMS Sie in welche Tarifzonen gesendet haben und wie viel Sie dafür zahlen, dass Sie andere Dienste (z.B. Internet) in Anspruch genommen haben. Nun wird es etwas mühsamer: Haben Sie im letzten Monat ihr Handy so genutzt wie immer? Anders gefragt: War es ein Monat, in dem Sie für alle Nutzungsarten durchschnittliche Kosten haben? Um Ihre bisherige Handynutzung korrekter zu erfassen, ist es sinnvoll, einen längeren Zeitraum zu betrachten. Wie lange zurück sollen Sie Handyrechnungen suchen? Das ist Ihre Entscheidung! Wollen Sie Ihre Aufmerksamkeit auf die alltägliche Nutzung konzentrieren? Dann reichen ein paar Monate. Wollen Sie auch im Urlaub besonders günstig telefonieren oder per Internet die Spiele einer Sportart verfolgen oder Fernsehen? Hier hilft Ihnen jetzt die Formulierung ihrer Ziele. Schauen Sie bitte nach, was Sie notiert haben! Haben Sie die Zielsetzungen hinreichend präzise formuliert? Falls „ja", dann haben Sie jetzt Entscheidungskriterien. Falls „nein", dann verstehen Sie jetzt vermutlich besser, weshalb wir Sie ersucht haben, zunächst über die Zielsetzung genauer nachzudenken und ergänzen Ihre Ziele für dieses Handyprojekt.

Im nächsten Schritt wollen wir ihr Interesse auf weitere Ideen lenken: nutzen Sie das Handy in Zukunft mit demselben oder einem anderen Vertrag mag es sein, dass es absehbare Gründe für ein geändertes Nutzungsverhalten gibt. Das ist nicht leicht zu prognostizieren, meinen Sie? Dann haben Sie eine typische Problematik für Modellrechnungen entdeckt. Die Zukunft ist nicht leicht vorher zu sagen. Die Daten aus der Vergangenheit hingegen lassen sich oft - wenngleich mit einiger Mühe - ziemlich gut zusammenstellen. Die Daten aus der Zukunft kennen wir nicht exakt, sonst gäbe es auch kein Glücksspiel wie Lotto!

Wenn Sie die Entscheidung für ein bestimmtes Angebot in Sachen Handy nicht nur auf Annahmen beruhen lassen wollen, und davon ausgehen, dass alles so bleibt wie es ist, müssen Sie ein wenig Kreativität an den Tag legen und ein mögliches (zukünftiges) Benutzerverhalten festlegen: Wie soll es werden?

Schreiben Sie bitte auch dazu Stichworte auf, z.B.: Wenn ich ein neues Smartphone bekomme, möchte ich das Internet am Handy nutzen, insbesondere für Mails.

Wenn Sie bis hier aktiv mitgearbeitet haben, wissen Sie nun etwas mehr über sich als Handynutzer, ihre Wünsche an einen für Sie optimalen Tarif und ihre Erwartungen an Ihr künftiges Nutzungsverhalten. Mit etwas Optimismus lässt sich das Resultat als typisch für den Versuch einer Mathematisierung charakterisieren: Ein Aspekt des alltäglichen Verhaltens wird analysiert – und vielleicht hat diese Analyse auch Folgen für das rationale Verhalten bzw. Einfluss auf Entscheidungen, die aufgrund der Analyse gefällt werden können. Wir kommen auf diesen Punkt zurück!

Vielleicht fragen Sie schon seit einiger Zeit mit wachsender Ungeduld: Was hat das Mathematik zu tun? Ich habe noch gar nichts berechnet!?

Mathematik ist weit mehr als Berechnungen durchzuführen (vgl. Fischer, Malle, 1985). Zu jedem realen Projekt gehört vorab eine gründliche Überlegung bzgl. der Zielsetzung, eine Suche bzw. Zusammenstellung und Analyse der Daten und eine Modellierung. All das findet wie angedeutet nicht nur einmal und endgültig, sondern in einem fortlaufenden Prozess statt, der aufgrund der schon gewonnenen Ergebnisse und ihrer Interpretation im Lichte der Zielsetzung und der gesammelten Daten hoffentlich schrittweise zum Ziel führt. All das ist (auch) Mathematik – übrigens auch in den Formulierungen der Schulcurricula.

Entscheidungen zum Start

Was nun? Für den Anfang ist das Arbeiten mit allen Informationen über Handynutzung doch recht kompliziert. Wir empfehlen, zunächst nur über die am meisten genutzte Variante nachzudenken, beispielsweise die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am öftesten angewählten Zone.

> Wir laden dazu ein, Argumente für und gegen eine solche radikale Einschränkung für den Beginn zu sammeln.

Das zentrale Gegenargument ist offensichtlich: Sie nutzen Ihr Handy vielfältig! Wenn Sie eine Änderung Ihres Vertrages in Betracht ziehen, dann nur in dem Fall, dass die Rechnungssumme insgesamt kleiner wird (und die Netzabdeckung mindestens so gut wie bisher ist etc.). Was hilft es, wenn die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am meisten angewählten Zone geringer werden, die SMS oder sonstigen Dienste aber deutlich teurer?

Das zentrale PRO-Argument ist eher didaktisch: So geht es gerade am Beginn der eigenen Modellierungserfahrung viel einfacher – vermutlich für Sie und sicher für Ihre Schülerinnen und Schüler. Falls Sie dennoch direkt mit erhöhter Komplexität starten wollen, dürfen Sie das gerne tun: Wir holen Sie nach ein paar Modellierungsschritten (Reflexion der ersten Modellierung) wieder ein.

Bevor wir mit dem ersten Modellierungsschritt beginnen, weisen wir ausdrücklich darauf hin, wie unüblich es ist, dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht über den Verlauf nachdenken, ihre Arbeit planen und über einzelne Schritte entscheiden, bevor sie etwas ausrechnen. Das wird von Lehrerinnen und Lehrern nicht selten beklagt, dafür wird es jedoch (eher) selten geübt. Meist kommt die Lehrperson mit einem überlegten und vorgefertigten Plan für die Schulstunde ins Klassenzimmer, erläutert neuen Stoff, wiederholt bereits geübte Algorithmen oder bestimmt, dass eine ausgewählte Aufgabe aus dem Schulbuch gelöst werden soll. Diskussionen über den Lehrplan, die Abfolge der zu behandelnden

Themengebiete oder die Auswahl der zu lösenden Schulbuchaufgaben sind dabei nicht erwünscht, werden als Zeitverschwendung abgetan, und stellen in der Regel auch eine Überforderung der Schülerinnen und Schüler dar.

Ganz anders ist die Situation im realitätsbezogenen Mathematikunterricht, wenn ein erstes Modell gebildet und dazu Entscheidungen getroffen werden sollen. Weshalb ist die Situation hier anders? Der wichtigste Punkt ist die unmittelbare Relevanz der Entscheidung für die eigene Tätigkeit; die Klasse denkt darüber nach und entscheidet gemeinsam, was die Schülerinnen und Schüler selbst sinnvoll als nächstes tun. Die Entscheidung betrifft sie unmittelbar selbst und ist kein folgenloses Urteil der Arbeit einer Curriculum Kommission bzw. deren Umsetzung durch das zuständige Ministerium (wie bei einer Diskussion über das Curriculum). Wenn das Thema des Unterrichts – so wie in diesem Fall bei Handytarifen – so gewählt wurde, dass Schülerinnen und Schüler aufgrund ihrer Lebenserfahrung in der Lage sind, kompetent mitzureden, dann sollen sie auch die Gelegenheit dazu erhalten (vgl. Heymann, 1996). Wenn sie in solchen Fällen lernen, selbstbestimmt zu handeln, trägt der Mathematikunterricht zur Erreichung der entsprechenden Kompetenz bei. Selbstverständlich dürfen und sollen die Lehrenden auch hier die Lernenden unterstützen. Diese kann in Form einer Beratung im Hinblick auf Entscheidungsmöglichkeiten (Gibt es ein mathematisches Verfahren, so etwas zu berechnen? Gibt es dafür eine Formel?) als auch im Hinblick auf Entscheidungsverfahren (einfache Abstimmung ist bekanntlich nicht immer das ideale Verfahren) bestehen.

Erste Modellierung

> Betrachten Sie bitte Ihre Handyrechnung oder eine Werbung für einen anderen Anbieter oder eine zur Verfügung stehende Tarifinformation. Was fällt Ihnen mit einem mathematisch geschulten Blick auf?

Wir sehen drei Typen von Tarifen für die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am meisten angewählten Zone, eine Flatrate (es kostet unabhängig von den tatsächlich geführten Gesprächen immer eine feste Summe pro Monat, z.B. 17 Euro), einen von Null ausgehend gleichmäßig steigenden Preis (etwa 10 Cent pro Minute) oder eine Mischung von Grundkosten und gleichmäßig steigendem Tarif (etwa 10 Euro monatlich plus 3 Cent pro Minute).

Mathematisch gesehen sind das alles *lineare* Funktionen. Wenn Ihnen das auch aufgefallen ist, denken Sie sicher ebenso wie wir an grafische Lösungsverfahren oder an das Lösen linearer Gleichungen. Wenn Ihre Schülerinnen und Schüler gerade (z.B. numerische) Lösungsverfahren geübt haben, erkennen sie dies vielleicht auch selbst und benötigen weniger Hilfe. Wir geben im Folgenden etwas mehr Hilfe mit dem Blick auf jene Schülerinnen und Schüler, die Ihnen als Lehrkraft für mehr Hilfe dankbar sind.

Für Schülerinnen und Schüler ist es ungewohnt, aus einer mehr oder weniger umfangreichen Tarifinformation, aus einer (Monats-)Rechnung oder aus einem Werbetext Daten und Informationen herauszulesen, die benötigt werden. Textaufgaben in Schulbüchern zeichnen sich durch eine besonders präzise Sprache aus und enthalten i. d. R. genau die zur Lösung einer Aufgabe benötigten Angaben in einer Form, die eine exakte „Übersetzung" von Aufgabentext zu mathematischer Beschreibung bzw. Formel oder Gleichung ermöglichen. Diese präzisen und genauen Texte gibt es nur in Schulbüchern. Wenn Schülerinnen und Schüler Mathematik fürs Leben lernen sollen, müssen sie auch lernen, die für sie wichtigen Informationen aus einem weniger präzisen Alltagsproblem herauszufiltern. Es steht die Frage nach dem was man wissen will im Fokus!

Schreiben Sie bitte auf, mit welcher Fragestellung bzw. welchem Informationswunsch Sie den Werbetext bzw. die Internetseite studieren wollen.

Nach der vorhin getroffenen Entscheidung, uns zunächst auf Verbindungskosten für Telefongespräche in der am öftesten angewählten Zone zu konzentrieren, suchen wir nun genau diese Tarifinformation. Dazu notieren wir weitere Auffälligkeiten bei der Informationssuche. Diese können als Hinweis für mögliche Verbesserungen unserer Modellierung in weiteren Arbeitsschritten verwendet werden.

Welche Tarifinformation haben Sie gefunden? Wir haben aus verschiedenen Quellen die folgenden drei Typen gefunden:

Flatrate 17 Euro monatlich
10 Cent pro Minute ohne Grundgebühr
3 Cent pro Minute plus 10 Euro Grundgebühr pro Monat

Haben Sie Stichworte für mögliche Verbesserungen der Modellierung gefunden? Wir haben notiert:
Taktung (60 oder 30 Sekunden)
Fixkosten zu Beginn des Vertrages (Freischaltung, Nummer übertragen, Aktivierung – je nach Anbieter)
Neues Handy oder nicht?
Bindungsdauer?
Netzabdeckung

Diese Stichwortliste legen wir zunächst zur Seite. Selbstverständlich können Sie aus den gefundenen Tarifangaben unmittelbar mathematische Zusammenhänge erstellen und ggf. darstellen.

Falls Lernende Hilfe bei der Mathematisierung benötigen, schlagen wir vor, ganz traditionell eine Wertetabelle und eine Grafik zu erstellen. Eine Aufteilung in Kleingruppen (von max. 4 Personen) ist aus methodischen Überlegungen sicherlich hilfreich. Sie können im Laufe der Gruppenarbeit erkennen, wo allfällige Fragen und Probleme vorhanden sind bzw. was bereits gut gelingt.

Berechnet für die drei Tarife die monatlichen Kosten bei einer Gesprächsdauer von 1, 2, 3, 4 …bis 10 Stunden im Monat, tragt die Werte in eine Wertetabelle ein und zeichnet die Werte in eine Grafik!

Wir haben eine Tabellenkalkulation verwendet und folgende Wertetabelle erzeugt:

	Tarifart		
Monatliche Gesprächsdauer in Stunden	Flatrate 17 €/M	10 ct/min ohne Grundgebühr	3 ct/min plus 10€ Grundgebühr
0	17	0	10
1	17	6	11,8
2	17	12	13,6
3	17	18	15,4
4	17	24	17,2
5	17	30	19
6	17	36	20,8
7	17	42	22,6
8	17	48	24,4
9	17	54	26,2
10	17	60	28

Bereitet man diese Informationen graphisch auf, erhält man eine Grafik wie die Folgende:

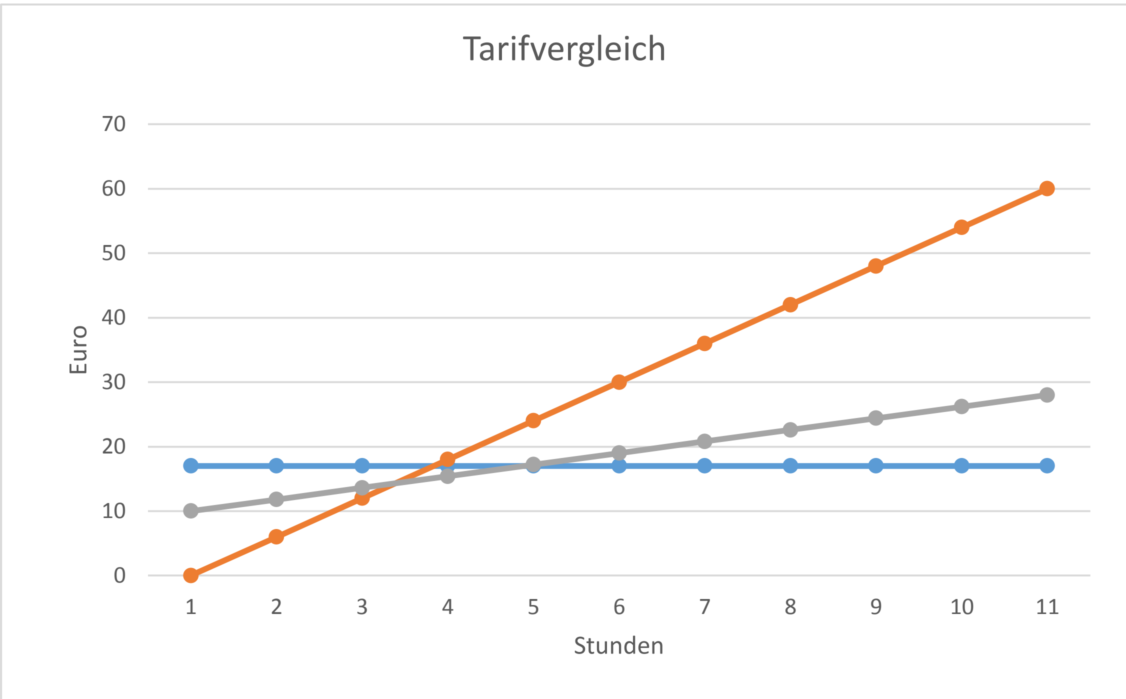


Abbildung 1: graphische Aufbereitung der Handy-Tarife

Was nun? Für Sie - als Mathematiklehrkraft - ist nach einem Blick auf die Grafik klar, in welcher Situation (bei welcher Intensität von Handynutzung) welcher Tarif am günstigsten ist. Wie aber geht es Ihren Schülerinnen und Schülern? Falls Sie ihnen eine Hilfe geben wollen, schlagen wir eine Kleingruppenarbeit mit etwa folgender Aufgabenstellung vor:

1. Schreibt bitte auf, weshalb wir die Wertetabelle und die Grafik erstellt haben!
2. Können wir aus der Tabelle bzw. der Grafik ablesen, was wir wissen wollen?
3. Für welche Gesprächsdauer pro Monat empfehlen wir welchen Tarif?
4. Wie genau muss die Gesprächsdauer pro Monat sinnvoller Weise angegeben werden? Können wir die Werte mit der gewünschten Genauigkeit aus der Tabelle bzw. der Grafik ablesen? Falls die Antwort „Nein“ ist: Wie können wir genauere Werte bestimmen?

Einige Anmerkungen zu den Aufgaben und möglichen Ergebnissen.

Ad 1): Offenbar kann so eine Wertetabelle bzw. Grafik hauptsächlich für Beratungszwecke verwendet werden. In der Grafik lässt sich schnell und einfach ablesen, welcher Tarif jemandem geraten werden kann, der das Handy ausschließlich für Gespräche nutzt und üblicherweise etwa x Stunden pro Monat telefoniert. Falls es „nur“ um die Frage geht, ob für einen einzelnen Fall (Nutzer mit bestimmter Stundenanzahl pro Monat) ein bestimmter Tarif am günstigsten ist, war der mathematische Aufwand vielleicht schon zu hoch. Allerdings ist eine durchschnittliche monatliche Gesprächsdauer keine fixe Größe. Abgesehen davon, dass ein solcher Wert nur aufgrund einer Reihe von Monatsabrechnungen einigermaßen genau angegeben werden kann, mag es sein, dass ein Nutzer aufgrund der Tarifinformation sein Telefonnutzungsverhalten ändert. Wer etwa recht viel telefoniert und meint, sich wegen der zu hohen Kosten einschränken zu müssen, kann durch eine solche Information auf den Gedanken kommen zu entscheiden, dass die Kosten sich ohnehin in der Nähe der Flatrate befinden. Deshalb wird ein Wechsel zu diesem Tarif das Telefonieren ohne dieses subjektive Unwohlsein (ich telefoniere zu viel bzw. zu lange – es wird zu teuer) ermöglicht. Wird darüber diskutiert, dass die Modellierung einer Thematik wie hier die Handytarife dazu führt, dass Menschen ihr Verhalten ändern, wird Realitätsbezug im Mathematikunterricht umgesetzt – und erhält so auch einen Bezug zur sozialen Realität. Wir kommen später darauf zurück.

Ad 2): Auf der Kosten-Achse ist der zu bezahlenden Betrag (in Euro) eingetragen. Es kommt also darauf an, für eine bestimmte Gesprächsdauer pro Monat jene Funktion zu wählen, die für diese Gesprächsdauer den kleinsten Kostenwert hat.

Ad 3): Durch Ablesen am Graphen erkennen wir, dass sich bis etwa 3,4 Stunden/Monat empfiehlt Tarif 2 zu wählen, von etwa 3,4 Stunden/Monat bis etwa 5 Stunden/Monat Tarif 3 und für alle Werte darüber Tarif 1 (die Flatrate).

Ad 4): Lange Zeit waren Fragen hinsichtlich der Genauigkeit eines Ergebnisses kein wichtiges Thema im Mathematikunterricht der Sekundarstufen. Ohne elektronische Rechenhilfen war es schlicht und einfach mühsam, etwas sehr genau zu berechnen. Wir erinnern daran, wie lange Menschen (wie z. B. J. Kepler) an Tabellen für Werte von Winkelfunktionen oder Logarithmen gearbeitet haben, um etwas mehr Genauigkeit (insbesondere bei astronomischen Berechnungen) zu ermöglichen. Mit elektronischen Hilfsmitteln (z. b. dem Taschenrechner) wurde es auf einmal leicht, Ergebnisse auch auf viele Stellen hinter dem Komma genau zu berechnen. Daraus entstand bisweilen im Mathematikunterricht eine Überlegung zum Sinn der Anzahl von Kommastellen. Oft wurde jedoch einfach für alle Rechnungen entschieden, dass zwei Stellen hinter dem Komma passen.

Falls Sie meinen, dass weitere Übungen im Umgang mit den Tarifen benötigt werden, könn(t)en folgende Fragen aufgeworfen werden:

a) Berechnen Sie bitte, wie viel Sie mit Eurem Nutzungsverhalten bei den verschiedenen Anbietern zahlen würden?
b) Nehmen Sie eine fiktive Person und legen Sie die Handynutzung dieser Person fiktiv fest. Das kann jemand aus Ihrem Bekanntenkreis sein, aber auch eine bewusst ungewöhnliche Person, etwa ein Handelsreisender, der sehr viele Gespräche mit Kunden führt, oder

ein Motorradfahrer, der etwas zu schnell in die Kurve gefahren ist, nun einige Wochen im Bett liegt und viel mit allen Bekannten telefonieren möchte.

Nun lassen Sie die zu entrichtenden Kosten für diese fiktiven Personen berechnen. Vergleichen Sie die Resultate vergleichen und fordern Sie die Lernenden auf, der fiktiven Person eine (guten) Rat zu geben.

Übrigens treiben Sie selbst durch das Erfinden fiktiver Personen eine Form mathematischer Modellbildung. Haben Sie sich zu solchen Personen auch einen fiktiven Lebenslauf, die Einrichtung des Wohnzimmers oder andere Details überlegt, die nichts mit dem Verhalten als Handynutzer oder Handynutzerin zu tun haben? Vermutlich nicht!

Mit anderen Worten: Sie haben sich beim Modellieren auf das Wesentliche konzentriert. Das geschieht völlig zu Recht und genau so, wie es beim Modellbilden in der Mathematik üblich ist.

Was „wesentlich“ ist, wird wiederum mit dem Blick auf die Ziele des Projektes bestimmt. Hier wird ein wichtiger Unterschied zu jener Art Mathematikunterricht deutlich, in dem alles von außen (z.B. durch das Schulbuch und die Lehrkraft, die es durcharbeiten lässt) fest vorgegeben ist.

Reflexion der ersten Modellierung

Nun steht die Entscheidung hinsichtlich des Handyvertrags an: Behalten oder zu einem anderen Anbieter wechseln? Wie entscheiden Sie sich auf Basis ihrer (ersten) Erkenntnisse?

Wenn Sie nicht wechseln wollen, ist für Sie das Projekt abgeschlossen, auch wenn noch viele mathematische Fragen offen sind. Wie geht es Ihnen als mit einem solchen Ergebnis? Schon nach dem ersten Durchlauf wissen Sie, was Sie eigentlich wissen wollten und hören einfach auf, obwohl weitere Überlegungen doch einige interessante (mathematische) Herausforderungen bieten können. Im

Mathematikstudium haben wir vielfach geübt und deshalb nachhaltig gelernt, dass eine Aufgabe erst dann richtig gelöst und eine Theorie erst dann verstanden ist, wenn wir gründlich bis zum Schluss daran arbeiten.

Wenn wir realitätsnahe Fragestellungen behandeln, ist ein anderes Kriterium wichtiger als die innermathematische Systematik und Vollständigkeit: *die Praxis*. So wie die Fragestellung aus nachvollziehbaren praktischen Überlegungen entstanden ist, entscheiden wir anhand von Sinnüberlegungen nach dem Bedarf aus der Praxis, wie intensiv wir uns mit der Frage und er dazu notwendigen Mathematik beschäftigen (wollen). Sobald wir mit hinreichender Genauigkeit wissen, was wir wissen wollten, sind wir fertig – unabhängig davon, welche Möglichkeiten zur intensiveren Mathematisierung wir nicht nutzen. Was ist „hinreichende Genauigkeit“? Das ist oft ein Kompromiss zwischen dem Erreichen von Zielen mit vertretbarem Zeitaufwand und den zur Verfügung stehenden mathematischen Möglichkeiten bzw. Gegebenheiten und mehr oder weniger genauen Daten der Praxis.

Im Schulunterricht können wir im Projektverlauf auch bewusst aus der Suche nach einer passenden Antwort für die Praxis aussteigen und – als Exkurs – einer mathematischen Frage genauer nachgehen. Die Taktung beim Handytarif werden wir im Anschluss an das Zwischenfazit als Beispiel dafür ausführlicher behandeln.

Zwischenfazit nach der ersten Modellierung

> Notieren Sie bitte, was Sie bisher getan und erreicht haben. Nehmen Sie die Aufzeichnungen der einzelnen Arbeitsschritte hinzu und überlegen Sie, was Sie erreicht haben und was noch erreicht werden soll.

Wir haben eine zunächst willkürliche Entscheidung gefällt, um leichter beginnen zu können. Wir konzentrieren uns auf die Verbindungskosten für Telefongespräche in der am meisten angewählten Zone. Dank dieses Entschlusses haben wir es einfacher, aus der Fülle von Informationen zu einem angebotenen Handyvertrag jene Information herauszufiltern, die wir für eine erste Modellierung gebraucht haben: Wie ist der Tarif für Telefongespräche in dieser Zone? Wir haben drei Typen von Tarifen gefunden und mit Hilfe einer Wertetabelle und eines Graphen verglichen. Dadurch konnten wir - mit einer gewissen Ungenauigkeit - herausfinden, für welche Nutzungsdauer welcher Tarif am günstigsten ist.

Wie geht es weiter? Wie erwähnt hängt das davon ab, was wir erreichen wollen. Wenn wir durch den Blick auf unsere Handyrechnung festgestellt haben, dass wir mindestens eine Stunde täglich telefonieren, bietet es sich ohne längeres Nachdenken an, zu einer Flatrate zu wechseln, falls dort die Nutzung des Internets oder der Versand von SMS nicht zu teuer ist. Ähnlich einfach haben es Nutzer, die sehr selten ein Handy in die Hand nehmen: Der Tarif ohne Grundgebühr ist für sie am günstigsten.

Um für alle, die sich in diesen beiden Szenarien nicht wiederfinden, einen passenden Vorschlag eines adäquaten Angebots machen zu können, müssen wir offenbar unsere eingangs durchgeführten Vereinfachungen wieder rückgängig machen. Wir suchen einen Weg, die Kosten aller Nutzungsarten zu vergleichen. Davor betrachten wir (bzw. Sie bei weiterer Mitarbeit) die Einflüsse der Taktung auf die Tarife.

Erste Modellverbesserung im Detail: Taktung

> Suchen Sie bitte Informationen zur „Taktung". Was ist das? Weshalb ist es wichtig?

Wir haben im Internet folgende Erläuterung gefunden: „Alle angegebenen Preise für Telefonate sind Minutenpreise. Die Taktangaben, die zusätzlich gemacht werden, sind folgendermaßen zu verstehen: Die erste Zahl gibt an, welche Zeit auf jeden Fall berechnet wird, egal wie lange das Gespräch dauert. Die zweite Zahl gibt an, in welchem Takt die nachfolgende Zeit nach dem ersten Takt abgerechnet wird. Alle Taktangaben erfolgen immer in Sekunden." (vgl. http://www.billiger-telefonieren.de/thema/taktung/)

Ohne langes Nachdenken können wir die folgende Überlegung teilen: „Für den Verbraucher ist natürlich eine möglichst genaue Abrechnung am fairsten – also eine Sekundentaktung. Bei Anbietern, die dagegen einen 5-Minuten-Takt haben, zahlt man immer für mindestens fünf Minuten, auch wenn ein Anruf nur wenige Sekunden dauert. Am gebräuchlichsten ist die minutengenaue Taktung.“ (ebd.)

Wir wissen an dieser Stelle bereits, dass durch die Taktung eine Flatrate noch günstiger wird, viele kurze Gespräche die anderen Tarife deutlich teurer machen usw. Was können wir im Unterricht machen, wenn wir sie Schülerinnen und Schüler schrittweise zu solchen Einsichten führen wollen?

Zunächst sollte der Unterschied zwischen sekundengenauer und minutengenauer Taktung erkannt und verstanden werden. Dazu können Daten über eigene Gespräche gesammelt und ausgewertet werden. „Notiert bitte die Dauer der nächsten zehn Gespräche, die ihr am Handy führt, möglichst genau!“ Nehmen wir an, folgende Aufzeichnungen liegen vor:

Gespräch	**Dauer**
1	1 min 14 sec
2	35 sec
3	3 min 54 sec
4	2 min 34 sec
5	45 sec
6	8 min 22 sec
7	5 min 45 sec
8	38 sec
9	1 min 12 sec
10	6 min 19 sec

Offensichtliche Fragestellungen können schnell gestellt werden, wie z. B.

(1) *Wie lange wurde telefoniert?* und daraus resultierend

(2) *Wie viele Gesprächsminuten werden aufgrund der Taktung 60/60 berechnet?*

Lösung:

(1) 74 + 35 + 234 + 154 + 45 + 502 + 345 + 38 + 78 + 379 = 1884

(2) 1884 Sekunden sind 31 Minuten und 24 Sekunden. Bei sekundengenauer Taktung wären also 32 Minuten zu bezahlen, wenn die angefangene Minute als Ganze berechnet wird. Tatsächlich werden 2 + 1 + 4 + 3 +1 + 9 + 6 + 1 + 2 + 7 = 36 Minuten verrechnet. Die Rechnung erhöht sich durch die Minuten – Taktung um 8,9 %. Zum Vergleich: Wie wäre es bei einer Stunden – Taktung? Für knapp 32 Minuten Gesprächszeit würden 10 Stunden berechnet!

Für eine Tarifentscheidung in der Praxis reicht es in den meisten Fällen, zu beachten, dass bei einer Minutentaktung (Kürzel 60/60 in der Tarifinformation) alle Tarife je nach durchschnittlicher Dauer der Gespräche um ca. 10 % teurer werden, die nicht vom Typ „Flatrate“ sind.

Wie versprochen zeigen wir nun, wie sich an dieser Stelle aus der praktischen Frage eine mathematische Frage entwickeln kann, die in den Mathematikunterricht zur Leitidee „Funktionaler Zusammenhang“ passt. Wir setzen uns als Ziel die Tariferhöhung durch die Taktung genauer zu erfassen.

Betrachten wir zur Motivation folgendes Ausgangsbeispiel:

> Die beiden Zwillingsschwestern Maria und Anna haben sich zum Ziel gesetzt, in 10 Testgesprächen genau eine Minute zu telefonieren, um ihren Tarif optimal auszunutzen. Maria ist sehr geschickt und konsequent; sie schafft es, zehnmal nach genau 59 Sekunden Gesprächsdauer aufzulegen. Anna ist nicht so geschickt, sie legt 10 Mal nach einer Minute und einer Sekunde auf. Was folgt? Maria werden 10 Einheiten berechnet und Anna zahlt zwanzig Einheiten – und das bei nur 20 Sekunden mehr Gesprächszeit. Das erscheint ungerecht.
>
> Versuchen Sie bitte, die Kosten der Gespräche für Maria und Anna grafisch darzustellen!

Wir haben die Darstellung als Stabdiagramm gewählt – auf der waagrechten Achse ist die Anzahl der Gespräche eingetragen.

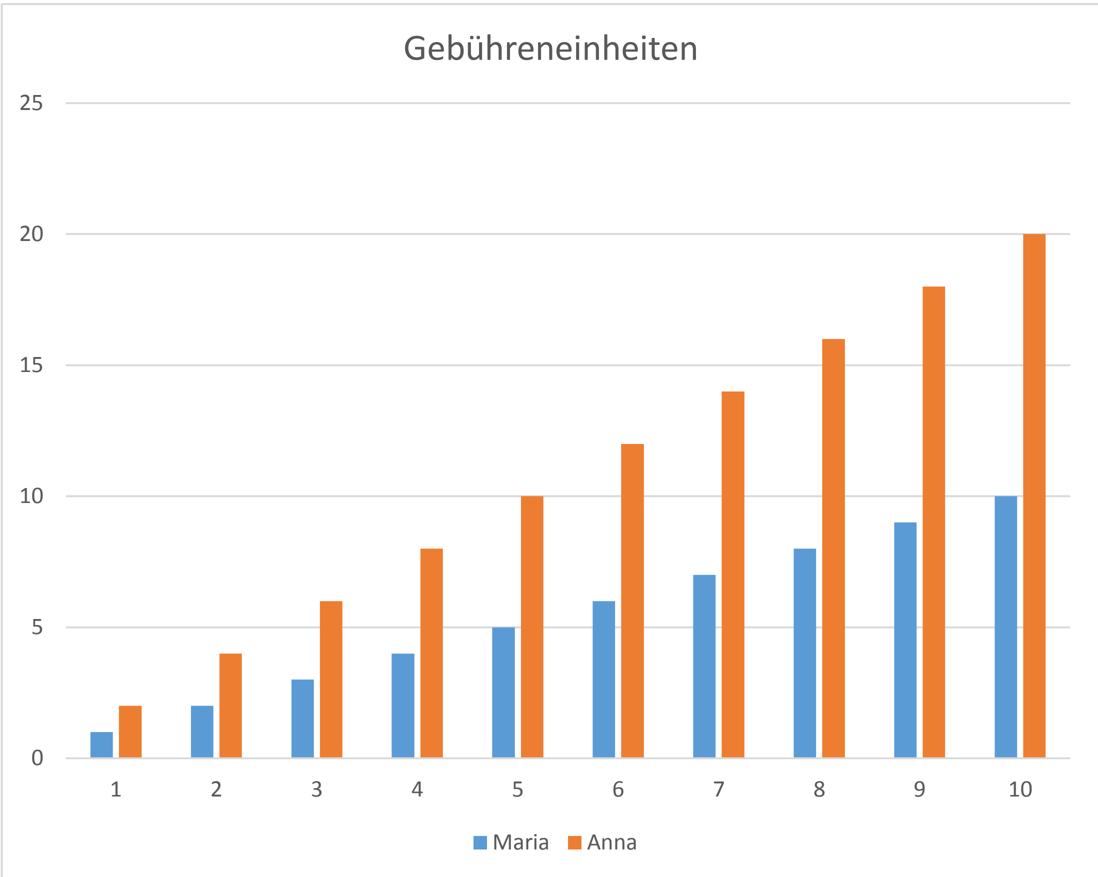


Abbildung 2: graphische Aufbereitung der Taktung 1

Weshalb ist die folgende Darstellung als Graph linearer Funktionen nicht ein besseres Darstellungsmittel?

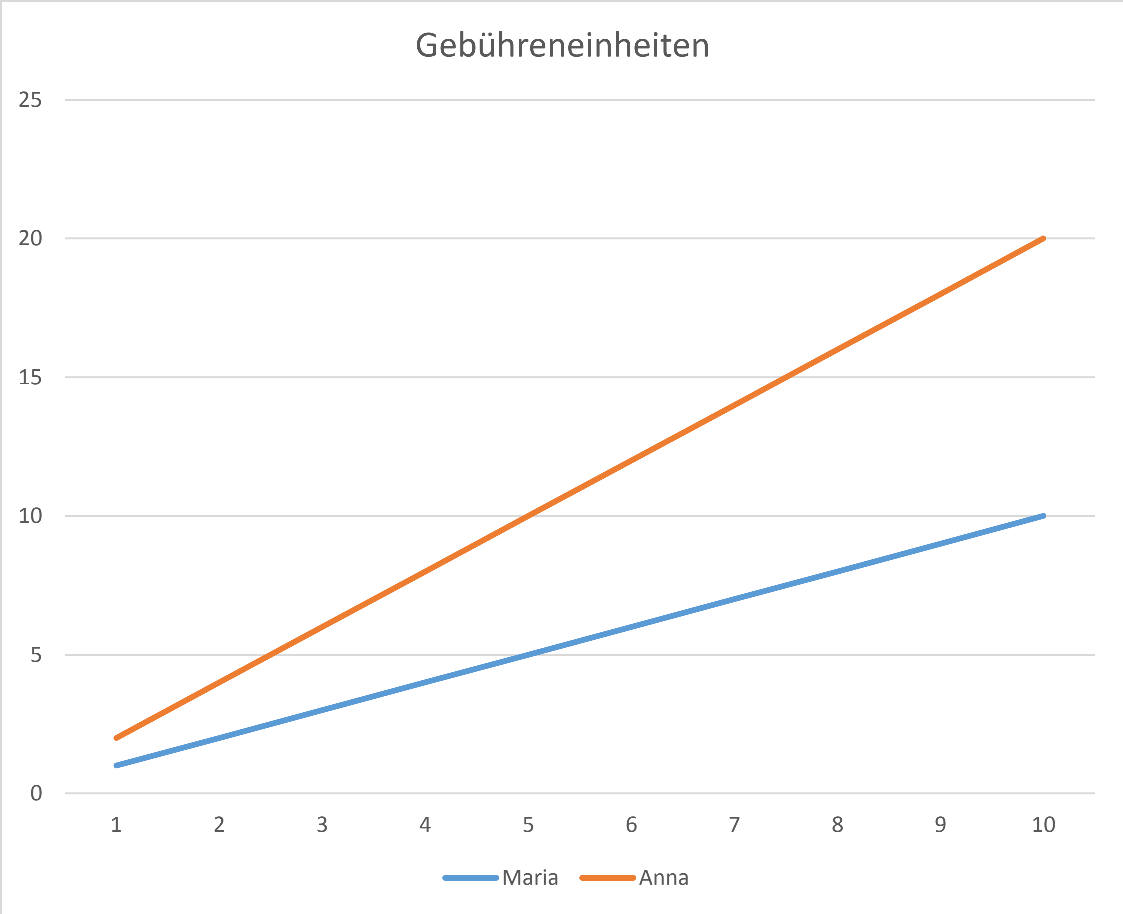


Abbildung 3: graphische Aufbereitung der Taktung 2

Aus dieser Darstellung könnte man im Unterschied zum Balkendiagramm doch recht gut ablesen, wie viel zu zahlen wäre, wenn nicht 3 oder 4, sondern 3,45678 Gespräche geführt wurden. Das stimmt, aber wie ist der Wert 0,45678 im Zusammenhang mit der Anzahl von Gesprächen zu interpretieren?

Wenn im Unterricht zu diesem Thema Gruppen von Schülerinnen und Schüler oder einzelne Schülerinnen und Schüler als Resultat ihrer Hausaufgabe unterschiedliche grafische Darstellungen erarbeitet haben, besteht eine sehr gute Chance, die Vor- und Nachteile zu erörtern und einen nachhaltigen Lernerfolg zu erzielen. Nicht alles, was ein Computerprogramm aus einer Datentabelle schnell und leicht darstellt, ist auch sinnvoll! Umgekehrt ist es durchaus sinnvoll und sogar notwendig, sich vor der Wahl einer grafischen Darstellung zu überlegen, was wir aus der Darstellung erkennen bzw. ablesen wollen und können.

Die beiden Darstellungen zu den Gesprächsgebühren für die obige Aufgabenstellung haben uns (und Ihren Schülerinnen und Schülern) hoffentlich ein wenig Vorsicht gelehrt: Die Versuchung ist groß, die Spitzen der Balken zu verbinden, um einen Trend zu erhalten, letztlich doch wieder eine lineare Funktion, mit der wir möglichst einfach Gebühren vergleichen können. Wir gehen der Versuchung trotzdem nach – aber mit etwas mehr Vorsicht.

Für Maria und Anna haben wir bewusst Grenzwerte gewählt, um Aufmerksamkeit zu erzielen. Im Beispiel davor hingegen sind eher realistische Werte festgehalten. Fahren wir deshalb mit diesen Aufzeichnungen fort. Erstellen Sie bitte eine Grafik, die diese Gebühren darstellt.

Sieht Ihre Darstellung so ähnlich aus?

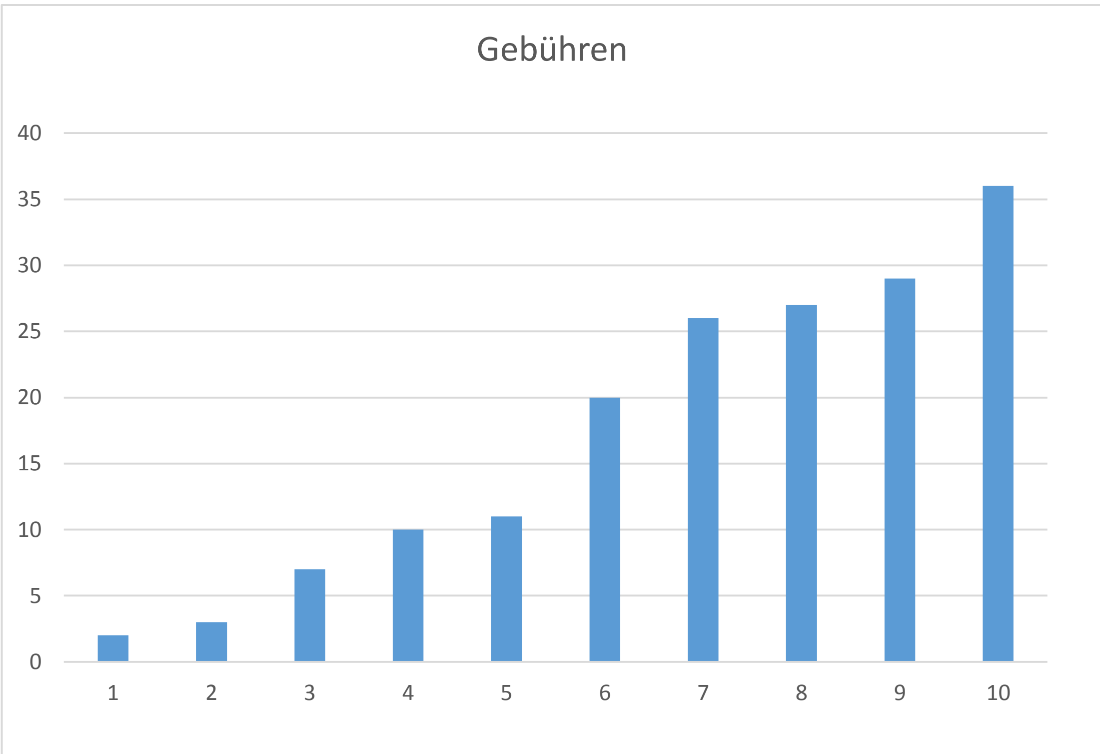


Abbildung 4: graphische Aufbereitung der Taktung 3

Auf der waagrechten Achse sind die Gespräche nummeriert, auf der senkrechten Achse summieren sich die Gebühren. Wie riskant (und hilfreich) ist es jetzt, die Spitzen der Balken durch Punkte zu ersetzen?

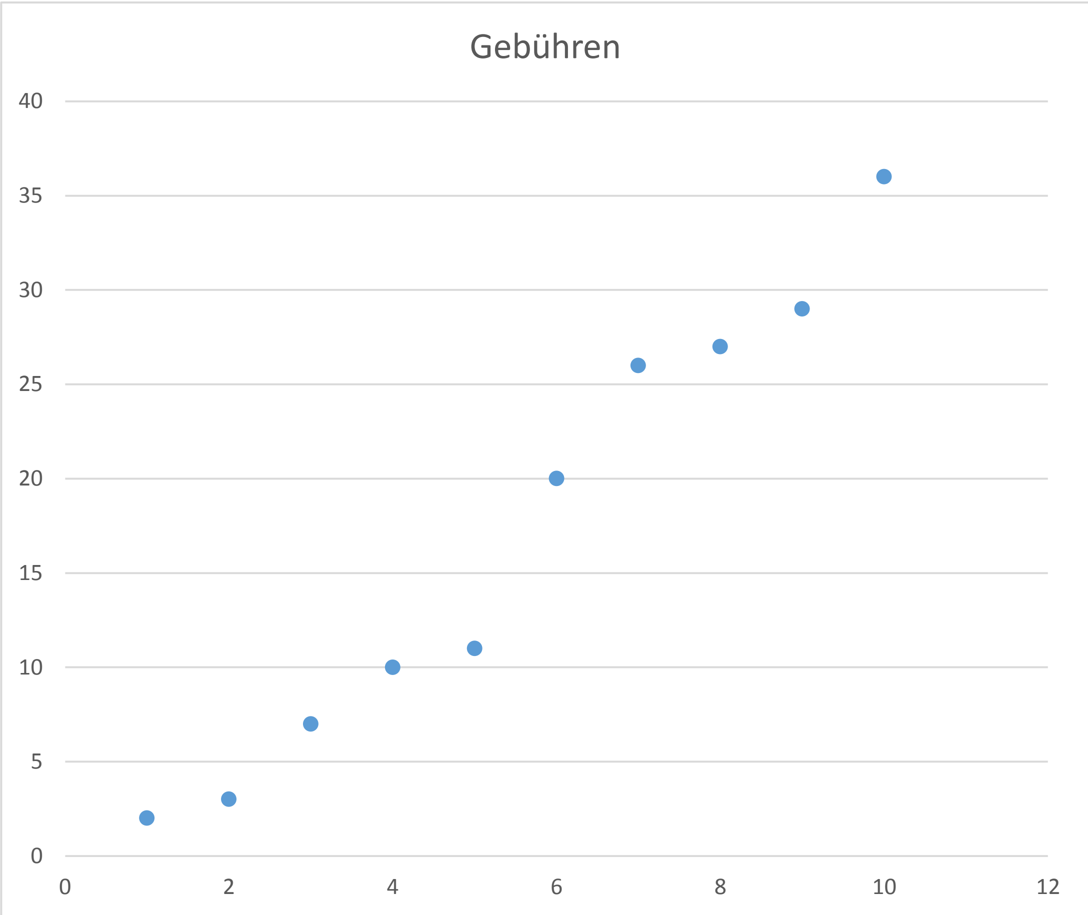


Abbildung 5: graphische Aufbereitung der Taktung 4

Die Punkte können mit Hilfe einer Trendlinie, z. B. einer linearen Funktion, verbunden werden und wir können folgende Information gewinnen: Bei einer durchschnittlichen Gesprächsdauer von etwas über 3 Minuten muss etwa 3,5 Gebühreneinheiten pro Gespräch bezahlt werden. Wenn wir wissen, wie viele Gespräche im Monat geführt wurden, können wir entscheiden, welcher Tarif am günstigsten ist.

Wenn wir von dem Beispiel ausgehend noch mehr Mathematik üben wollen, bietet es sich an, statt der verwendeten Tabelle vom

Zufallsgenerator erzeugte Zahlen für die Gesprächsdauer von Anrufen zu erzeugen und auszuwerten. Wenn wir dann noch überlegen, dass es für die Abrechnung egal ist, in welcher Reihenfolge die Gespräche geführt wurden, können wir die Gespräche nach Länge sortieren und erhalten so eine näherungsweise lineare Trendfunktion, aus der wir die Kosten und die gewünschte Tarifempfehlung ablesen können.

Wir halten als Fazit der ersten Modellverbesserung, hier der Berücksichtigung der Taktung, im Detail fest, dass längere Takte zu höheren Gesprächsgebühren führen. Die Erhöhung und damit die Gesamtgebühr richten sich nach der Dauer der geführten Gespräche. Kürzere Gespräche, die um ein paar Sekunden die volle Minute überschreiten, fallen dabei mehr ins Gewicht als lange Gespräche, bei denen die zusätzliche angebrochene Minute weniger zusätzliche Gebühreneinheiten zur Folge hat.

Verbessertes Modell: Telefon- + SMS-Gebühren

Wir nehmen im zweiten Schritt die Kosten für SMS hinzu. Unabhängig davon, ob Sie gleich auch die Internetnutzungskosten und andere Kosten mit hinzunehmen wollen oder nicht, ersuchen wir Sie, zunächst zu überlegen, wie Sie die verschiedenen Kostenarten (für Gespräche und SMS) zu einem mathematischen Modell zusammenstellen.

Offenbar wird das Modell auch mit Hilfe linearer Funktionen dargestellt, wobei wir uns an die Überlegungen zur Taktung erinnern. Allerdings handelt es sich in diesem Fall um die zweidimensionale Darstellung einer linearen Funktion mit zwei Variablen.

> Ist vor diesem Hintergrund die Suche nach dem geeigneten Anbieter auch schon in der Sekundarstufe I mathematisch behandel- bzw. umsetzbar? Was meinen Sie dazu?

Wenn wir verschiedene Angebote im Tarifvergleich betrachten, sehen wir wieder eine große Vielfalt unterschiedlicher Kombinationen. Es gibt wiederum eine Flatrate für Verbindungsgebühren und SMS, Tarife mit

Grundgebühr und weniger Kosten pro Minute und SMS und solche ohne Grundgebühr mit höheren Tarifen für Verbindungsentgelte und SMS. Interessant ist zudem, dass zwar vielfach, aber nicht immer die Kosten pro Minute denen für ein SMS entsprechen. Einige Tarife sind offenbar für Leute gedacht, die hauptsächlich reden und kaum SMS versenden wollen oder umgekehrt. Hier gibt es deutliche Unterschiede zwischen den Kosten pro Minute und denen für ein SMS.

Wer genau weiß, wie das Handy oder Smartphone genutzt werden soll, kann sich also direkt auf die Suche nach einem passenden Tarif machen. Wer die Rolle des Beraters einnehmen will, muss noch ein wenig Mathematik investieren, um wieder eine leicht interpretierbare Zusammenfassung der Tarifinformationen zu erhalten. Wie geht das?

Wir versuchen es gemeinsam für die drei dargestellten Tarife (1) – (3):

1. Flatrate 20 Euro monatlich
2. 10 Cent pro Minute ohne Grundgebühr plus 10 Cent pro SMS
3. 3 Cent pro Minute plus 3 Cent pro SMS plus 10 Euro Grundgebühr pro Monat

Wir schreiben diese Tarife zu Demonstrationszwecken als zweidimensionales lineares Modell in zwei (unterschiedlichen) Schreibweisen an:

Funktion_1 (Verbindungskosten, SMS) = 20 Euro/Monat

$$f_1\,(x,y) = 20 \text{ mit } x,y \geq 0$$

Funktion_2 (Verbindungskosten, SMS) = 10 Cent/Minute + 10 Cent/SMS

$$f_2\,(x,y) = 0{,}1x + 0{,}1y \text{ mit } x,y \geq 0$$

Funktion_3 (Verbindungskosten, SMS) = 10 Euro/Monat + 3 Cent/Minute + 3 Cent/SMS

$$f_2\,(x,y) = 10 + 0{,}03x + 0{,}03y \text{ mit } x,y \geq 0$$

Die folgende Grafik soll uns zeigen, bei welcher Gesprächsdauer und SMS-Anzahl die Tarife zwei und drei die Flatrate erreichen. Zudem ist es möglich die Beziehung der Tarife zwei und drei zueinander zu erkennen.

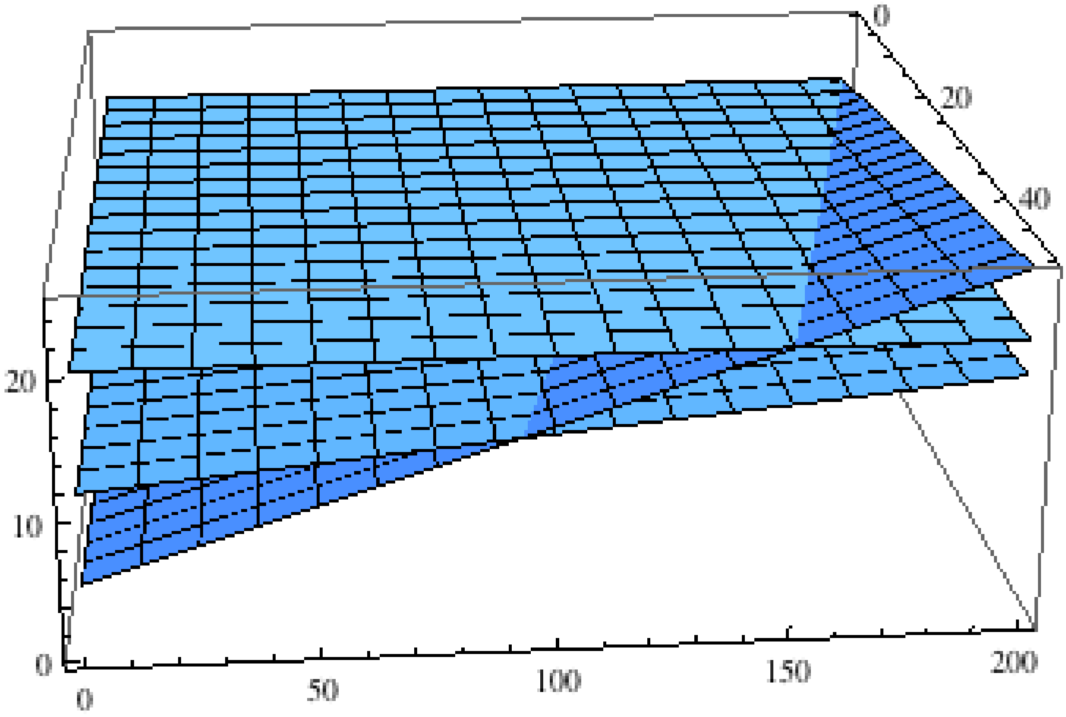


Abbildung 6: 3D Graph

Ist die Interpretation dieser Graphik für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I noch möglich? Die Gleichungen beschreiben Halbebenen, die sich schneiden. Dabei erhält man jedoch keinen (eindeutigen) Schnittpunkt, sondern Schnitt-Geraden. Diese „Problematik" wird aber üblicherweise als Teil der analytischen Geometrie in der Oberstufe unterrichtet und ist ohne tiefgehendes Hintergrundwissen schwer durch den Kalkül oder eine Grafik allein vermittelbar. Eine Interpretation ist aber vielleicht mit etwas Hilfe trotzdem möglich und kann ein motivierendes Fenster zu einem mathematischen Inhalt eröffnen, der erst in späteren Jahren behandelt wird.

Wir erkennen aber an dieser Stelle klar, dass der eingeschlagene Weg für die nahe liegende nächste Stufe der Modellerweiterung, den Einbezug von Internetnutzungsgebühren, sicher nicht gangbar ist – eine vierdimensionale Darstellung als anschauliches Werkzeug funktioniert nicht. Analytische Geometrie im Raum hingegen ist im Curriculum (der

Sek. II) vorhanden. Wir entscheiden uns an dieser Stelle abzubrechen, weil wir unsere didaktischen Ziele für das Eingangskapitel erreicht haben – wie wir im folgenden Fazit zum Projekt zeigen.

Fazit Handyprojekt

Im Hinblick auf das zunächst etwas vage formulierte Ziel der Bemühungen um Handytarife können wir festhalten, dass es gelungen ist, für Verbindungsentgelte nicht nur anzudeuten, sondern grafisch darzustellen, wie Mathematik dazu beitragen kann, Klarheit in die Vielfalt der Informationen und Angebote als Entscheidungsgrundlage zu bringen. Für die Kosten für SMS und Internetnutzung haben wir nur den Weg gewiesen, haben ihn aber nicht beschritten, da er über die Grenzen der in der Sek I verfügbaren Mathematik hinausführte. Am Beispiel Taktung haben wir gezeigt, wie schnell der Wunsch nach mehr Genauigkeit und Berücksichtigung von mehr Aspekten der zu modellierenden Realität zu wachsender mathematische Komplexität des Modells führen kann. Um ein Ausufern zu verhindern, ist es immer wieder hilfreich, sich das gesetzte Ziel in Erinnerung zu rufen. Die Zielsetzung liefert die Möglichkeit zu entscheiden, wo Grenzen zu setzen sind. Wenn die Mathematik jenseits der Grenze interessant erscheint, ist es selbstverständlich ein mögliches Thema des Mathematikunterrichts, einer Anregung aus einem realitätsnahen Problem folgend, innermathematische Fragen strukturell und verallgemeinernd aufzugreifen und zu vertiefen.

Im Hinblick auf die Ziele dieses einleitenden Kapitels in diesem Lehrbuch zum Modellieren ist es uns hoffentlich gelungen, an einem (vergleichsweise) einfachen Beispiel einige typische Aspekte des Modellierens im Mathematikunterricht zu erläutern:

1. Am Anfang muss klar sein, was das Ziel des Arbeitens ist. Das Ziel kann nach einigen Schritten, insbesondere der Analyse der vorhandenen Daten und nach ersten Berechnungen meist präzisiert bzw. in Teilziele aufgegliedert werden. Klare Ziele helfen sehr, Entscheidungen über den weiteren Projektverlauf zu fällen.
2. Die für eine Modellierung eines Aspektes der Realität notwendigen Daten und ihre Strukturen müssen meist erst beschafft und geordnet

werden. Sehr oft müssen dabei Fragen nach der sinnvollen und mit angemessenem Aufwand erreichbaren Genauigkeit gestellt werden. Im weiteren Verlauf des Buches werden wir an vielen anderen Beispielen zeigen, dass die Genauigkeitsfrage oft der ganz zentrale Punkt im Projektverlauf ist.

3. Zum Start ist es oft hilfreich, ganz bewusst die Komplexität zu reduzieren und mit einem kleinen und einfachen Anteil der Gesamtthematik zu beginnen. Selbstverständlich bleibt die eigentliche Fragestellung in der Realität davon unbeeindruckt so komplex wie zuvor. Deshalb ist es ratsam, in einem späteren Arbeitsschritt die Komplexität des Modells so lange zu erhöhen, bis eine für die Praxis nützliche Antwort mit hinreichender Gewissheit gegeben werden kann. Einen Beweis im mathematischen Sinne, dass die gefundene Antwort reicht, gibt es nicht, nur die Rückmeldung aus der Praxis selbst.
4. Das Projektende ist nicht durch die Mathematik, die vollständig richtige und bewiesene Lösung bestimmt, sondern durch eine willkürliche Entscheidung, die sich weitgehend nach einer subjektiven Einschätzung der Qualität des Erreichten richtet. Wenn die am Projekt arbeitenden Menschen den Eindruck haben, dass sie durch das Projekt genug im Hinblick auf die eigenen Ziele bzw. Fragen an die Realität erfahren haben, hören sie auf und setzen das Ergebnis um.
5. Schließlich gibt es eine abschließende Reflexion: Haben Sie im Zuge des Projektes das erfahren, was Sie wollten? Haben Sie Ihren Handyvertrag und Ihr Handynutzungsverhalten hinterfragt und eventuell sogar geändert? Dann können Sie aus eigener Erfahrung mitvollziehen, dass diese Art realitätsbezogener Mathematikunterricht z.B. Änderungen des tatsächlichen Verhaltens als Konsument zur Folge haben kann. Damit werden aber die Anforderungen an die Qualität der zu leistenden Arbeit höher als bei Schulbuchaufgaben. Ob eine Schulbuchaufgabe richtig oder falsch gelöst wird, kann sich auf das Verständnis und die Note auswirken. Ob eine Projektfragestellung hinreichend genau und nicht falsch beantwortet wurde, kann das Leben selbst ändern – zum Guten wie zum Schlechten. Wer ein Projektergebnis erzielt und in die Praxis umsetzt, muss deshalb bereit sein, sich dafür auch zu verantworten!

Einige andere Aspekte des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts sind von diesem Beispiel aus nicht so gut erkennbar. Wir weisen deshalb darauf hin, dass diese Aufzählung nicht vollständig ist – sie wird später wieder aufgegriffen und ergänzt.

Kapitel 2: Motivation

Was haben meine Schülerinnen und Schüler von realitätsbezogenem Mathematikunterricht? Was lernen sie dabei? Was habe ich davon? Wie viel zusätzliche Arbeit ist das?

Mitte der siebziger Jahre wurde die MUED (www.mued.de) gegründet. Seither werden solche Fragen im deutschen Sprachraum immer wieder systematisch auf MUED-Tagungen und anderen Veranstaltungen zur Fortbildung von Lehrerinnen und Lehrern erörtert. Ebenso wurden und werden solche Fragen von vielen Mathematiklehrkräften gestellt, wenn im Zuge von ISTRON-Tagungen (http://istron.uni-koblenz.de/istron_web/) oder in anderen Zusammenhängen Lehrerfortbildung zum realitätsbezogenen Mathematikunterricht angeboten wird. Wir haben seit fast 40 Jahren immer wieder in der Diskussion dieser Thematik mit Mathematiklehrkräften sowie Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern nach überzeugenden Antworten auf diese und ähnliche Fragen gesucht. Wir glauben für uns sehr überzeugende Antworten gefunden zu haben, die wir in diesem Kapitel zusammenfassen. Wir wissen aber auch aus den vielen Diskussionen einiges über die begrenzte Überzeugungskraft unserer Argumente. Auch die besten Argumente bewirken keinesfalls immer und automatisch entsprechende Konsequenzen für das eigene Verhalten: wer ohnehin schon realitätsbezogene Aufgaben im Mathematikunterricht einsetzt, es einmal versuchen will oder es im Studium mit Interesse lernen will, muss eigentlich nicht erst überzeugt zu werden, sondern eher in der eigenen Auffassung bestärkt werden.

Wer hingegen wie bisher als erfahrene Mathematiklehrkraft anders unterrichtet hat und nichts mit realitätsbezogenem Mathematikunterricht zu tun haben will, kann durch (unsere) Argumente vermutlich eher nicht überzeugt werden.

Wir bitten Sie auch an dieser Stelle um Mitarbeit: Notieren Sie bitte Ihre Position in der Debatte. Unterrichten Sie bereits realitätsbezogen? Haben Sie damit gute oder schlechte Erfahrungen gemacht? Sind Sie prinzipiell eher dafür oder dagegen? Schreiben Sie die wichtigsten PRO und CONTRA Argumente auf. Vergleichen Sie nach der Lektüre der folgenden Seiten Ihre aufgeschriebene Position mit der, die Sie nach der Lektüre einnehmen. Dann kommt rückblickend die wichtigste Frage: Hat sich Ihre Einschätzung durch die Lektüre geändert?

Nachhaltig positives Image

Beginnen wir unsere Argumentation bei jenen, die unterrichtet werden sollen, den Schülerinnen und Schülern. Was sie vom üblichen Unterricht halten, erfahren wir oft durch die typisch gestellte Frage: „Wozu sollen wir das lernen?“ Die beiden klassischen Antworten („das werdet ihr später, im Rückblick erkennen“ und „das steht so im Lehrplan!“) kommen nicht immer gut an – sie sind wenig überzeugend. Nun wissen wir genau, dass es weder theoretisch noch praktisch (schon aus Zeitgründen) möglich und sinnvoll ist, für jedes Unterrichtsfach jederzeit für alle Schülerinnen und Schüler einsehbar und nachvollziehbar in einer von allen akzeptierten Argumentation zu begründen, was gerade gelernt werden soll. Es stimmt aber nachdenklich, wenn es offenbar aus Sicht vieler Schülerinnen und Schüler an *keiner Stelle* im Mathematikunterricht gelingt. Noch nachdenklicher wird man, wenn der Eindruck entsteht, dass Erwachsene den Mathematikunterricht im Rückblick für weitgehend oder gar völlig sinnlos halten. Im Zuge von empirischen Forschungen zum Verhältnis von Erwachsenen zur Mathematik ist das international häufig festgestellt worden: „Eine Reihe von Studien (z. B. Maaß 1994, oder EU, o. J.)) haben gezeigt, dass der übliche Mathematikunterricht zwei Hauptwirkungen hat, einerseits wenig nachhaltiges Wissen über Mathematik und andererseits eine tiefsitzende Abneigung.“ (vgl. Maaß, 2012, S. 29).

Kann den Mathematiklehrkräften das öffentliche Image der Mathematik egal sein? Interessiert Sie nicht, was die Menschen über die Mathematik denken? Wir glauben das nicht! Nach unserer Kenntnis ist die große Mehrheit der Mathematiklehrkräfte fachlich und persönlich sehr engagiert. Es existieren aber empirische Untersuchungen zu Mathematikkenntnissen von Lernenden und insbesondere von Erwachsenen, dass im Durchschnitt **immer** viel zu wenig von dem Stoff nachhaltig gelernt wird. Wir sind fest davon überzeugt, dass sich mit kleinen Veränderungen im Unterricht mehr Wissen über Mathematik nachhaltiger lehren lässt und sehen realitätsbezogenen Mathematikunterricht als einen wichtigen Schritt in dieser Richtung.

Dies kann beispielsweise so umgesetzt werden, dass ein oder zweimal im Halbjahr ein etwas größeres realitätsbezogenes Projekt im Mathematikunterricht umgesetzt wird. Um Missverständnisse zu vermeiden, betonen wir gleichzeitig, dass es uns keinesfalls darum geht, **nur** noch realitätsbezogen zu unterrichten. Dieser Aspekt der Mathematik ist einer von vielen, der Mathematikunterricht vorkommen soll.

Besseres Verständnis von Mathematik durch mehr Wissen über Mathematik

Welchen Sinn soll es haben, wenn viele Aspekte von Mathematik im Mathematikunterricht vorkommen? Mathematik ist eine sehr vielfältige Wissenschaft mit sehr vielen unterschiedlichen Teilgebieten, Bezügen zu anderen Wissenschaften, zur Lebens- und Berufswelt, einer langen Geschichte und einer sehr spezifischen (formal-axiomatischen) Methodik, die sie von anderen Wissenschaften deutlich unterscheidet. Ein Satz der Algebra über Gruppen oder Körper wird weder empirisch überprüft wie in den Sozialwissenschaften noch experimentell wie in den Naturwissenschaften!

Aus unserer Sicht ist das zentrale Ziel des Mathematikunterrichtes, dass Schülerinnen und Schüler die Mathematik in ihrer Vielfalt und Besonderheit kennen und schätzen lernen. Damit steigt auch die Chance, dass alle Schülerinnen und Schüler zumindest einen oder einige Aspekte kennen lernen, über die sie einen persönlichen und positiven Zugang zur Mathematik finden. Das operative Handeln (etwas ausrechnen oder allgemeiner formuliert: einen vorbestimmten Weg zur Lösung bestimmter

Aufgabentypen gehen) verengt das Bild von Mathematik und den Zugang zur Mathematik. Wenn also im Mathematikunterricht nur oder hauptsächlich operativ gehandelt wird, verengt sich das Verständnis von Mathematik ebenso wie ein möglicher Zugang zur Mathematik; zum Schluss bleibt dieser Unterricht zumindest im Bewusstsein derer, die ihn erlebt haben, sinnlos und nutzlos.

Wenn wir für mehr realitätsbezogenen Mathematikunterricht und mehr Wissen über Mathematik plädieren, werden wir immer wieder gefragt, was denn nach unserer Meinung stattdessen weniger unterrichtet werden soll. Schließlich bleibt die Anzahl der Stunden, in denen Mathematikunterricht stattfindet konstant oder sinkt sogar. Wenn etwas Neues hinzukommen soll, muss doch etwas anderes weichen?

Der zentrale Begriff in dieser Debatte ist die „Stofffülle“: Niemand auf der Welt ist mehr in der Lage, all die neu hinzukommenden Sätze und Theorien aus allen Teilgebieten der Mathematik auch nur zur Kenntnis zu nehmen, geschweige denn, alles zu verstehen. Für die Schulmathematik ist diese Wissensvermehrung mit wachsender Geschwindigkeit nahezu bedeutungslos. Neue mathematische Erkenntnisse sind i. d. R. selbst in sehr vereinfachter Form für Schülerinnen und Schüler unverständlich. Im Unterschied zu den Natur- oder Geisteswissenschaften führen Fortschritte in den Wissenschaften nicht zu neuen Kapiteln oder Themen in den Lehrplänen für Mathematik.

Weshalb stöhnen die Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer dennoch mehr als die Lehrerinnen und Lehrer anderer Unterrichtsfächer über die Stofffülle? Wir haben den Eindruck, dass ein wesentlicher Grund für die von vielen Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern als belastend oder gar überfordernd empfundene Stofffülle in ihrer fachspezifischen Sozialisation zu suchen ist. Wie bereits im ersten Kapitel angedeutet gehört es zum mathematikspezifischen Habitus (L. Huber 1993, J. Klüver 1988), Fragen vollständig zu beantworten, Zusammenhängen soweit es geht auf den Grund zu gehen und eine systematische Ordnung eines Stoffes als wertvoll zu erachten. Anders ausgedrückt: Gute Mathematikinnen und Mathematiker mögen es nicht, wenn etwas nur bruchstückhaft und unvollständig erläutert wird.

Wenn in einer Auflistung von zu unterrichtenden Themen für eine Schulklasse eine bestimmte Anforderung genannt wird (etwa Term Umformungen beherrschen oder 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten lösen), übersetzen das die meisten Mathematiklehrkräfte in die Anforderung, möglichst alle wichtigen Arten von Term Umformungen oder Lösungsverfahren zu unterrichten und so gut zu üben, dass die entsprechenden Aufgaben dazu von den Schülerinnen und Schülern in der Klassenarbeit gelöst werden können. So wird aus einer kurz formulierten Anforderung im Lehrplan eine umfangreiche Unterrichtssequenz.

Wir wollen etwas Grundlegendes am Mathematikunterricht ändern, weil der Unterricht in der bisher üblichen Weise trotz aller Bemühungen aller Mathematiklehrkräfte nicht zu den gewünschten Resultaten geführt hat: Die im Durchschnitt erreichten Mathematikkenntnisse und Mathematikkompetenzen sind weit geringer und weit weniger nachhaltig als gewünscht und zudem hat die Mathematik als Folge dieses Unterricht in weiten Teilen der Bevölkerung ein schlechtes Image – das wird uns z.B. als Ergebnis vieler Test (PISA, Standards,…) immer wieder mitgeteilt. Diese Situation ist seit langem bekannt und Ausgangspunkt für viele Bemühungen zur Verbesserung des Unterrichtes.

Unser Vorschlag zur Verbesserung zielt *nicht* darauf, zusätzlich zu all den Anforderungen an den Mathematikunterricht eine neue, weitere Forderung, eben die nach realitätsbezogenem Unterricht zu erheben, sondern darauf, sich auf elementare pädagogische Erkenntnisse zurück zu beziehen: Man lernt gut, was man gern tut! Wir schlagen vor, die Motivation mehr in den Mittelpunkt zu rücken und nicht dasselbe noch intensiver, sondern anders zu unterrichten. Anders? Aus der universitären Mathematikausbildung haben wir (wie die meisten Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer) das Schema Definition – Satz – Beweis – Anwendung verinnerlicht. In vielen Jahren des Studiums haben wir in vielen Lehrveranstaltungen gesehen: So wird Mathematik gelehrt! Wir behaupten nun, dass dieses Schema für die meisten Lernenden in den Schulen (und Hochschulen – aber das hier nicht das Thema) motivationsfeindlich und lernhemmend ist, insbesondere dann, wenn sich der Teil „Anwendung“ darauf beschränkt, bestimmte Aufgabentypen zu trainieren und die anderen Teile nur rudimentär behandelt werden, indem eine Lehrkraft darüber kurz berichtet oder etwas an die Tafel schreibt (oft gleich verbunden mit der entschuldigenden Aussage, dass der eben an die Tafel geschrieben Beweis ohnehin nicht Stoff der nächsten Klassenarbeit ist).

Wir schlagen vor, den Mathematikunterricht (genauer: eine jeweils neue Phase) nicht mit einer Definition, sondern mit einem motivierenden Phänomen, einer interessanten Fragestellung aus der Lebens- und Arbeitswelt zu beginnen und im Zuge der Beantwortung der daraus erwachsenden Fragen auch jene mathematischen Mittel zu verwenden bzw. zu entwickeln, die zur Beantwortung gebraucht werden. Wenn im Zuge einer mathematischen Modellierung etwas von der Mathematik benötigt wird, was noch nicht vorher erläutert, bewiesen und geübt wurde, ist das kein „Beinbruch“, kein STOP für das Projekt, sondern eine wunderbare Gelegenheit, aus einer motivierenden Situation heraus ein neues und bisher unbekanntes Stück Mathematik zu entdecken bzw. zu entwickeln. In der Geschichte der Mathematik wurde oft aus einer praktischen Frage eine neue schöne und nützliche Theorie, sei es in der Physik oder der Ökonomie oder der reinen Mathematik. Als ein Beispiel von vielen für die Motivation, die aus einer interessanten Frage entstand und zu langen und mühseligen Berechnungen führte, nennen wir hier nur Keplers Berechnungen von Planetenbahnen.

Zur Perspektive von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern

Was habe ich davon? Wie viel zusätzliche Arbeit ist das? Wenn wir uns und Ihnen solche Fragen zugestehen und sie zu beantworten versuchen, offenbaren wir damit zugleich unseren Blick auf die Rolle und das Berufsverständnis von Mathematiklehrkräften. Für Lehrende und Lernende, für Schule und Gesellschaft ist es sehr gut, wenn Mathematiklehrkräfte jene mündigen Bürgerinnen und Bürger sind, zu denen sie die Lernenden erziehen sollen. Wenn sie in diesem Sinne als Vorbild wirken, leisten sie damit einen wesentlichen Teil ihrer pädagogischen Aufgabe.

Zunächst bitten wir wiederum Sie um Ihre Mitarbeit. Schreiben Sie bitte auf, welche Vor- und Nachteile Sie sich davon erwarten (oder schon erlebt haben), wenn Sie realitätsbezogen Mathematik unterrichten. Für den Fall, dass Ihnen auf Anhieb nicht so viel dazu einfällt, geben wir drei Stichworte dazu: Die Situation im Unterricht, ihre Freude am Unterricht und die Unterrichtsvorbereitung.

Wir geben offen zu, dass es uns viel Freude bereitet, realitätsbezogen Mathematik zu unterrichten und darüber zu schreiben. Die Freude hat zwei Hauptursachen:

- Einmal ist es viel angenehmer zu unterrichten, wenn die Lernenden etwas wissen wollen und deshalb motiviert sind, von sich aus mitzuarbeiten.
- Zum anderen lernen wir selbst auf diese Weise die Welt, in der wir leben besser kennen.

Bei MUED und ISTRON finden Sie eine Liste von Themen, zu denen Unterrichtsvorschläge ausgearbeitet, erprobt und veröffentlicht wurden. Aus einem energie- und umweltpolitischen Engagement wurden viele Beiträge zu Energie und Umwelt, durch die zumindest wir (und sicher auch die Lernenden, aber hier steht ja unser Vorteil im Mittelpunkt) die jeweilige Thematik besser verstanden haben. Selbst aus einer so ärgerlichen Angelegenheit wie dem Festsitzen im Stau vor dem Tauerntunnel wurde ein Beitrag zum realitätsbezogenen Mathematikunterricht, dessen Entstehung die Wartezeit angenehm gefüllt hat. Kurz: Uns interessiert, was die Welt im Innersten zusammenhält, und wir finden mit realitätsbezogener Mathematik und Modellierung bzw. Simulation Antworten. Indem wir unsere Suche dokumentieren bzw. mathematikdidaktisch aufarbeiten, eröffnen wir Lehrenden und Lernenden die Möglichkeit, selbst nach Antworten zu suchen und ihre Schlüsse daraus zu ziehen.

Die zusätzliche Freude am Forschen und Lehren hat ihren Preis; sie verlangt zusätzliche Arbeit. Für uns ist es einfach ein erfreulicher Teil der Arbeit, etwas das wir gern tun. Wir wissen aber auch, dass es Mathematiklehrkräfte gibt, für die zusätzliche Zeit für die Unterrichtsvorbereitung ein Problem ist. Wer zu Beginn seiner beruflichen Tätigkeit mit dem guten Vorsatz zu unterrichten beginnt, dass jede Stunde gut vorbereitet sein soll, wird schnell an die Grenzen der Arbeitskapazität stoßen. Hier raten wir, gezielt einige Stunden pro Monat besonders gut vorzubereiten, um gut realitätsbezogen unterrichten zu können – diese Investition lohnt sich. Zum Zeitausgleich bieten sich Stunden an, die am Schulbuch orientiert und dementsprechend schneller vorbereitet sind. Erfahrene Lehrkräfte, die mit Routine und Schulbuch die Vorbereitungszeit weitgehend reduziert haben, sehen in zusätzlichem Aufwand für Unterrichtsvorbereitung eher ein Problem. Auch wenn es schon viele gut ausgearbeitete Unterrichtsvorschläge gibt, besteht doch ein gewisser Aufwand darin, sich zu informieren und einen Vorschlag für die eigene Schulklasse zu adaptieren. Diesen Aufwand wollen wir nicht wegdiskutieren. Aber wir fragen diese Lehrkräfte, ob sie nicht doch auch mal etwas dafür tun wollen, dass sie und ihre Schülerinnen und Schüler zumindest einige Schulstunden mit mehr Motivation und Freude am Mathematikunterricht teilnehmen. Vielleicht ist die Situation mit dem Wandern auf einen Berg vergleichbar: das ist ohne Zweifel anstrengender, als sich im Liegestuhl auf der Wiese beim Hotel zu sonnen, aber die Anstrengung des Wanderns wird durch den guten Ausblick und das Erfolgserlebnis belohnt.

Die Erziehung zur Mündigkeit ist wesentliches Bildungsziel. Und als ein Schritt auf dem Weg dorthin findet sich in vielfältigen Zielformulierungen immer wieder die Forderung nach Realitätsbezug – auch in den Stoffkatalogen und Hinweisen zur Unterrichtsmethodik.

Kapitel 3: Einige empirische Forschungsergebnisse zum Themenbereich Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht

Wie schön wäre es doch, wenn es vor jedem Versuch, etwas Neues im Mathematikunterricht zu auszuprobieren, schon eine sichere Information darüber geben würde, dass der Versuch auf jeden Fall funktioniert und zu deutlich verbesserter Motivation, zu größerem Lernerfolg und (noch) mehr Freude am Unterricht führen wird! Nun sind bekanntlich Prognosen immer unsicher, insbesondere jedoch dann, wenn sie die Zukunft betreffen. Weder wir noch irgendjemand anderes kann Ihnen garantieren, dass Ihr erster Versuch ebenso wie alle weiteren Unterrichtsstunden eine einzige Erfolgsgeschichte werden. Wir warnen auch an dieser Stelle ausdrücklich vor „Kochrezepten" für idealen Mathematikunterricht, die angeblich immer und überall ideal funktionieren. Das kann es nicht geben, weil Lernende und Lehrende höchst unterschiedliche Individuen sind, die in ganz bestimmten Situationen mit sehr unterschiedlichen Vorerfahrungen und Erwartungen an unterschiedlichen Orten zusammen kommen. Ein Kochrezept hingegen setzt voraus, dass die Zutaten immer hinreichend identisch sind, also unabhängig sind von der Köchin und dem Koch, dem Ort, an dem gekocht wird etc.: 20 g Salz sind 20g Salz sind 20g Salz… aber: 20 Schülerinnen und Schüler sind NICHT 20 Schülerinnen und Schüler! Und Lehrer/in ist nicht gleich Lehrer/in! Wenn Sie im Laufe der Zeit ein Rezept mit denselben Zutaten immer wieder ausprobieren, wird vermutlich das Ergebnis immer besser. Was aber passiert, wenn Sie eine Unterrichtsstunde mit denselben Inhalten und Methoden in derselben Schulklasse immer wieder halten?

Vorschläge zur Änderung Ihres Unterrichts können immer nur dann erfolgreich sein, wenn sie von Ihnen selbst als dem besten Experten bzw. der besten Expertin für Ihren Unterricht aufgegriffen und situationsadäquat umgesetzt werden. Da niemand so genau und so viel wie Sie über Ihren Mathematikunterricht weiß, gibt es im Wesentlichen zwei Wege zur Veränderung. Den einen beschreiten Sie z. B. in diesem Augenblick, weil Sie sich durch dieses Buch über Möglichkeiten zur Veränderung in Richtung auf einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht informieren und dann entscheiden, ob und wie Sie diese Information in Ihrem

Unterricht nutzen. Der zweite Weg geht über eine Kooperation oder Beratung vor Ort: Sie vereinbaren mit Kollegen oder Kolleginnen (oder einer beratenden Person von außen) Unterrichtsbesuche oder gemeinsamen Unterricht (Team Teaching) und besprechen anschließend auch verschiedene Sichtweisen auf Ihren Unterricht. Dazu schreiben wir im weiteren Verlauf des Buches mehr.

Auch wenn wir keine Erfolgsgarantie und keine idealen Kochrezepte für den Unterricht anbieten, können wir Sie auf Ihrem Weg zum realitätsbezogenen Mathematikunterricht bestärken, indem wir Sie darauf hinweisen, dass andere Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer damit gute Erfahrungen gemacht haben. Der einfachste und direkteste Weg, etwas über die Erfahrungen anderer Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer mit realitätsbezogenen Mathematikunterricht zu hören, ist mit ihnen zu reden, etwa im Rahmen Fortbildungen oder insbesondere von MUED Tagungen, auf denen sich genau die Kolleginnen und Kollegen treffen, die solche einen Unterricht erprobt haben. Wer solche Chancen zu direktem Erfahrungstransfer nutzt, wird auch schnell zur Kenntnis nehmen, wie vielfältig und individuell solche Unterrichtserfahrungen sind. Mit etwas Glück findet sich auch eine Kollegin oder ein Kollege, die oder der in einer ähnlichen Schule mit ersten Versuchen begonnen hat und sich noch genau daran erinnert, worauf es dabei besonders ankam. Zudem lässt sich im persönlichen Gespräch offensichtlich auch etwas zurückfragen oder genauer nachfragen. Etwas, dass in einem veröffentlichen Text nicht steht, kann für Sie besonders wichtig sein und auf Nachfrage gern berichtet werden. Offensichtlich ist eine persönliche Nachfrage im Gespräch viel einfacher als ein Mail an Autoren oder Autorinnen.

Nun haben Sie vielleicht den Eindruck oder Einwand, dass solche persönlichen Erfahrungen recht subjektiv sind; berichtende Lehrerinnen oder Lehrer könnten ihre Leistungen schön reden oder bewusst Schwierigkeiten verschweigen. Deshalb haben wir an dieser Stelle ein kleines Kapitel eingefügt, in dem wir über einige Ergebnisse internationaler empirischer Untersuchungen berichten. Bevor wir dazu ins Detail gehen, stellen wir zusammenfassend fest, dass die meisten empirischen Studien dazu ermutigen, realitätsbezogen Mathematik zu unterrichten.

Empirie und Modellbildung

Zur typischen Ausbildung von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer gehören sehr selten eigene mathematikdidaktische Forschungen – wenn nicht eine Examensarbeit oder Diplomarbeit zum Abschluss des Studiums eigene Forschungen beinhaltet. Auch Lehrveranstaltungen zur mathematikdidaktischen Forschungsmethodik sind im Lehramtsstudium eher selten. Deshalb beginnen wir nun mit einem kleinen Exkurs, einigen Anmerkungen zu empirischen mathematikdidaktischen Forschungen.

Die erste und grundlegende Frage ist die nach dem Sinn: Weshalb sollen solche Forschungen überhaupt durchgeführt werden? Was meinen Sie dazu? Wir halten solche Forschungen für sinnvoll, weil sie Möglichkeit eröffnen, aus der Praxis ein Feedback zu mathematikdidaktischen Konzepten und Vorschlägen zu erhalten – und natürlich überhaupt erst einmal über den Rahmen persönlicher Erfahrungen oder einzelner Gespräche hinaus einen Eindruck von der Unterrichtswirklichkeit zu bekommen. Ist das nicht selbstverständlich? Nein, schauen Sie ein wenig zurück in die Geschichte der Mathematikdidaktik im deutschsprachigen Raum!

Lange Zeit konzentrierte sich die mathematikdidaktische Forschung auf stoffdidaktische Bemühungen: Ein mehr oder weniger großes mathematisches Teilgebiet etwa aus der Geometrie oder der Analysis wurde unter bestimmten Motto mehr oder weniger genau durchdacht und so aufgeschrieben, dass es aus der Sicht der Autoren bzw. Autorinnen besser als zuvor zum Lehren und Lernen geeignet war. Ein großes Vorbild für solche Bemühungen ist das Werk von Euklid, das bekanntlich mehr als 2000 Jahre lang vielen Menschen als Basis für ihre Bemühungen um ein Verständnis von Mathematik gedient hat. Mit den Texten zur Neuen Mathematik oder Modernen Mathematik, die versuchten, die Schulmathematik nach fachsystematischen Gesichtspunkten aufbauen von der „Mengenlehre“ (genauer: nach den Prinzipien der Werke von Bourbaki) aufzubauen, hat die Stoffdidaktik in der jüngeren Geschichte einen besonderen Höhepunkt erreicht. Ohne das Scheitern dieser Bemühungen hier im Detail erörtern zu wollen, weisen wir darauf hin, dass diese

Reformbewegung nicht von empirischen Studien begleitet war. Erst danach und vermutlich auch wegen einer Neuorientierung der Mathematikdidaktik aufgrund des Importes von pädagogischen Theorien und Methoden begann im deutschen Sprachraum die Zeit empirischer mathematikdidaktischer Forschungen.

Wie auch sonst üblich unterscheiden wir dabei zwischen quantitativen und qualitativen Studien. Ein typisches, sehr aufwendiges und dementsprechend teures Beispiel für eine quantitative Studie ist unter dem Stichwort PISA bekannt. Sehr viele Schülerinnen und Schüler werden per Fragebogen getestet bzw. nach ihrer Einschätzung oder Meinung gefragt. Die Ergebnisse (Testergebnisse, Kreuze auf den Fragebögen, etc.) werden statistisch ausgewertet und dann interpretiert. Mit anderen Worten: Für diejenigen Menschen, die am Text oder an der Befragung teilgenommen haben, lässt sich anschließend recht genau sagen, was sie angekreuzt bzw. aufgeschrieben haben. In der Regel wird nicht abgefragt, weshalb sie etwas (nicht) geschrieben oder angekreuzt haben – oft fragt man sich deshalb bei der Auswertung von Tests oder Fragebögen, weshalb ein bestimmter Prozentsatz und kein höherer oder geringerer heraus gekommen ist. Wenn ein gewisser Anteil der Gesamtheit am Test teilgenommen hat, lässt sich mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus dem Ergebnis folgern, wie der Test ausgefallen wäre, wenn tatsächlich alle Menschen, die zur fraglichen Gesamtheit gehören (z. B. Schülerinnen und Schüler aus einem (Bundes-)Land am Ende der Sek I oder Erwachsene der Altersgruppe 50 bis 55 Jahre) am Test teilgenommen hätten. Unter gewissen Umständen ist das Ergebnis der Stichprobe für die Gesamtheit repräsentativ. Problematisch wird es immer dann, wenn aus den Ergebnissen solcher Tests Folgerungen gezogen werden, die über die Interpretation der Testergebnisse bzw. der angekreuzten Meinungen hinausgehen. Die Interpretation der PISA – Ergebnisse durch die OEVD wird immer dann besonders umstritten, wenn aus den Ergebnissen generelle Schlüsse auf das Bildungssystem insgesamt gezogen werden und durch den Test als „bewiesen“ gelten (vgl. z.B. Hopmann u.a. 2007) – aber darauf näher einzugehen ist hier nicht das Thema.

Eine größere quantitative empirische Untersuchung, deren Ergebnisse Sie in Ihrem Bemühen um mathematische Modellierung im realitätsbezogenen Mathematikunterricht unterstützen können, ist unter dem Kürzel DISUM (wie „Didaktische Interventionsformen für einen selbstständigkeitsorientierten aufgabengesteuerten Unterricht am Beispiel Mathematik" – siehe http://www.mathematik.uni-kassel.de/~disum/home/home.php) bekannt. Für Schülerinnen und Schüler der 9. Schulstufe wurden „anspruchsvolle realitätsbezogene Modellierungsaufgaben" (http://www.mathematik.uni-kassel.de/~disum/ziele/ziele.php) entwickelt; Lehrerinnen und Lehrer sollten im Unterricht ein angemessenes „diagnostisch-methodische Lehrerhandeln beim selbständigen Umgehen" (ebd.) der Schülerinnen und Schüler entwickeln.

„Erkenntnisleitenden Fragen dabei sind:

- Was ist das kognitive Potential solcher Modellierungsaufgaben und was sind „Schlüsselstellen" beim Umgehen von Schülern mit diesen Aufgaben?

- Wie können Lehrer solche Schlüsselstellen diagnostizieren und wie können sie optimal intervenieren?

- Wie kann ein selbständigkeitsorientierter, kognitiv aktivierender Unterricht mit Modellierungsaufgaben inszeniert werden?" (ebd.)

Wir vermuten, dass Sie an den Antworten auf diese Fragen interessiert sind. Deshalb nun kommt wieder eine Aufgabe für Sie: Notieren Sie sich bitte, was nach Ihrer Erfahrung oder Einschätzung Antworten auf die Forschungsfragen sind.

Was haben Sie notiert? Die DISUM Homepage gibt folgende Liste als Projektergebnisse an:

„Bisherige Ergebnisse von DISUM

- Kognitiv anspruchsvolle Modellierungsaufgaben für den Unterricht und für Leistungsüberprüfungen, einschließlich „Task Spaces" für diese Aufgaben und Zusammenstellung aufgabenspezifischer

kognitiver Hürden (Lösungsprozessanalysen)
- Problemadäquate (siebenschrittige) Version des Modellierungskreislaufs für Lehr- und Forschungszwecke
- Schüleradäquate (vierschrittige) Version des Modellierungskreislaufs („Lösungsplan“) mit aufgabenspezifischen Konkretisierungen
- Kategorisierung von Lehrerinterventionen in Situationen der Aufgabenbearbeitung
- Unterrichtsdokumente und -analysen zur Behandlung von Modellierungsaufgaben durch "Best-Practice-Lehrkräfte"
- Didaktisch konzipierte Unterrichtseinheiten zum Modellieren (konkretisiert durch "Regiebücher")
- Projektspezifische Tests und Fragebögen
- Erkenntnisse über den Umgang von Schülern und Lehrern mit Modellierungsaufgaben, u.a. über
- Motivations- und Herausforderungsgehalt der Aufgaben
- Psychosoziale Aspekte der Lehrer-Reaktion auf die Schülerarbeit (z.B. „Zurückspielen“ von Fehlern an die Schüler)
- Wichtige Rolle von motivationalem Feedback
- Möglichkeiten der Realisierung von Einzelarbeit in der Gruppe
- Realisierbarkeit von Modellierungsaktivitäten auch mit Hauptschülern.“ (http://www.mathematik.uni-kassel.de/~disum/erg/erg.php)

Nun sind Sie hoffentlich schon richtig neugierig, was denn z.B. „Projektspezifische Tests und Fragebögen“ oder „Regiebücher“ sind. Die Projekthomepage nennt eine Vielzahl von Veröffentlichungen zum Projekt (http://www.mathematik.uni-kassel.de/~disum/publ/publ.php). Zu viele? Wo beginnen? Ein Tipp dazu von uns: Wir hoffen, dass Sie in der Schule die Zeitschrift „Praxis der Mathematik in der Schule“ haben und dort im Jahrgang 2011 den Beitrag von S. Schukajlow u.a. (PM 2011, 53(38), S. 40-45) über „Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. Praxis der Mathematik in der Schule“ finden. Der Beitrag geht von einer offenen Aufgabe aus („Paul wohnt in Kassel im Stadtteil Harleshausen. Er würde gerne reiten lernen und sucht auch eine Unterkunft für sein Pferd. Welchen Reiterhof würdest du ihm empfehlen?“), die durch Zusatzinformationen bzw. detaillierte Aufgabenstellung weniger offen gemacht werden kann. Im

Beitrag wird sehr schön erläutert, wie eine methodische Orientierung („minimale individuell-adaptive Hilfen“) tatsächlich umgesetzt werden kann. Ein „Lösungsplan“ kann dabei wirkungsvoll als Hilfe für Lernende eingesetzt werden.

Zusammengefasst: Wir empfehlen diesen und ähnliche mathematikdidaktischen Aufsätze als (Start-)Hilfe für Sie. Für den Fall, dass Sie keinen einfachen Zugriff auf die „Praxis der Mathematik“ haben, noch ein Tipp: Kollege Schukajlow hat auf seiner Homepage einer Reihe seiner Texte zum DISUM Projekt zugänglich gemacht. (vgl.: http://www.schukajlow.de/).

Ein Beispiel für eine qualitative Forschung

Qualitative Forschungen versuchen, mit anderen Methoden (Interview, Videobeobachtung etc.) über eine kleine Gruppe von Testpersonen wesentlich mehr als bei Fragebögen möglich heraus zu finden – und streben schon von der Anlage der Forschung her keine Repräsentativität an. Wenn eine qualitative Studie gelingt, schafft sie vertiefte Einsichten in spezielle Situationen und eröffnet den Horizont für weitere Forschungen.

Als Beispiel wählen wir eine aktuelle Diplomarbeit aus Linz: M. Haberbauer hat mit Hilfe von ausführlichen Interviews „Einstellungen und Emotionen von Mathematiklehrern“ erforscht, die in Linz studiert haben. Wie ist die Arbeit aufgebaut?

„In meiner Arbeit geht es mir in erster Linie darum, ein gutes, möglichst umfassendes Gesamtbild von insgesamt neun Mathematiklehrern zu erhalten, die an der Johannes Kepler Universität in Linz Mathematik für Lehramt studiert haben. Bei den Recherchen zu diesem doch sehr groß gefassten Bereich sind mir insbesondere zwei Gebiete aufgefallen, die sich durch ihren Einfluss auf das Unterrichtshandeln eines Lehrers auch auf die Qualität des Mathematikunterrichts selbst auswirken können: Einerseits sind dies die Einstellungen (engl. beliefs), die ein Lehrer mit sich herumträgt, andererseits die Emotionen des Lehrers im Unterricht.

Unter Einstellungen (Unterkapitel 1.1.) versteht man in der didaktischen Forschung bewusste, aber auch unbewusste Überzeugungen oder Philosophien, die ein Lehrer insbesondere von der Mathematik selbst, von Mathematik als Schulfach und vom Lehren und Lernen von Mathematik hat. Diese Einstellungen können natürlich großen Einfluss auf den Unterricht des Lehrers ausüben.

Emotionen (Unterkapitel 1.2.) sind auch im Klassenzimmer in vielfacher Hinsicht vorhanden, wobei ich mich in meiner Arbeit einzig auf die Leistungsemotionen des Lehrers, also die Emotionen, die in Verbindung mit dem subjektiv bewerteten Erfolg im Unterrichtsgeschehen stehen, konzentrieren werde: „Wenn die Schüler brav bei der Sache sind und etwas lernen, freut sich der Lehrer", könnte man hier zum Beispiel ein wenig salopp formulieren. Emotionen treten, da sie in einer konkreten Situation empfunden werden, im Normalfall zwar nur zeitlich begrenzt auf, wodurch sie den Unterricht unmittelbar bis kurzfristig beeinflussen, können bei wiederholtem Auftreten aber auch eine mehr oder weniger starke Auswirkung auf das zukünftige Unterrichtsverhalten des Lehrers haben.

Zur Untersuchung dieser beiden Gebiete habe ich offene Fragen für Lehrerinterviews zusammengestellt (Unterkapitel 1.3.) und damit insgesamt neun Mathematiklehrer interviewt. Die Auswertungen dieser Interviews finden sich in den neun Unterkapiteln von Kapitel 2. Abschließend folgen noch ein Resümee (Unterkapitel 3.1.), in dem ich unter anderem versuche, die eingangs gestellte Frage zu beantworten, und außerdem ein persönliches Schlusswort (Unterkapitel 3.2.)." (ebd., S. 5)

Das Zitat, in dem der Autor sein Werk vorstellt, zeigt in durchaus typischer Weise den Aufbau einer qualitativen empirischen Studie. Ausgehend von bisherigen Forschungen (hier zu Einstellungen und Emotionen) wird eine (es können auch mehrere sein) spezifische Fragestellung oder auch Forschungshypothese entwickelt, der im Folgenden nachgegangen wird. Wenn Sie mit dieser Art von Forschung weniger vertraut sind, werden Sie vermutlich die Frage stellen, die aus der Richtung der mathematischen Statistik immer wieder gestellt wird: 9 Lehrende werden befragt – wie kann denn irgendein Resultat dieser Befragung *repräsentativ* für eine größere Gruppe von Lehrenden oder gar für alle Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer sein? Gar nicht! Prinzipiell lassen sich mit qualitativen Studien keine repräsentativen Resultate erzielen.

Weshalb geben sich dann Forscherinnen und Forscher überhaupt Mühe mit solcher Art von Forschung (wenn doch „nichts“ Repräsentatives dabei herauskommt)? Solche Fallstudien ergeben oft richtungsweisende Einblicke, die Forschenden erfahren auf diese Weise etwas, das niemand auf einen Fragebogen schreibt und das ohne qualitative Forschungsmethode vielleicht unentdeckt bleibt. Oft sind qualitative Forschungen ein Anstoß oder Anlass für quantitative Studien mit neuen Fragestellungen und umgekehrt liefern Fragebögen oder Tests oft Hypothesen für qualitative Studien.

In der hier zitierten qualitativen Studie finden sich Ergebnisse, die auch in der größeren Studie von K. Maaß (2008) gefunden wurde, die Orientierung für diese Diplomarbeit war, nämlich bestimmte Typen von Mathematiklehrenden, „Learning-Process-Teacher“ und „Transmission-Teacher“. M. Haberbauer fasst seine Ergebnisse zum Punkt „Einstellungen“ wie folgt zusammen: „Hier muss an erster Stelle festgehalten werden, dass die von Katja Maaß (2008, S. 8f) rekonstruierten Lehrertypen auch in meiner Arbeit festgestellt werden konnten. Die Unterscheidung zwischen den beiden verschiedenen Grundtypen war dabei durchwegs absolut unproblematisch, da die Unterschiede wirklich sehr deutlich ausfallen. Die Entscheidung für oder gegen einen konstruktivistischen Unterricht zieht eine Vielzahl von Auswirkungen nach sich, die sich leicht feststellen lassen – auch wenn der jeweilige Lehrer in dem einen oder anderen Punkt seine Aussagen vielleicht ein wenig beschönigt, weil er schließlich aufgrund seiner Aus- und/oder Fortbildung weiß (oder zumindest wissen sollte), was die aktuellen didaktischen Forschungen über guten Unterricht aussagen. Besonders deutlich erkennt man meiner Beobachtung nach an der Bewertung des Lehrers von Gruppenarbeiten, was er von schülerzentriertem Unterricht hält: Traut er seinen Schülern zu, hier sinnvoll selbständig zu arbeiten – oder meint er eher, dass das nur verlorene Zeit wäre“ (ebd. S. 168)?

Um Ihnen noch ein wenig mehr Einblick in die Ergebnisse einer solchen Studie zu geben, folgt nun noch ein Zitat für den Ergebnissen im Hinblick auf „Emotionen“: „Die theoretischen Annahmen zu den Leistungsemotionen konnten praktisch durchwegs bestätigt werden: Freude verbinden die Lehrer mit Lernfortschritten, aber auch mit affektiv-motivationalen und disziplinären Zielen. Ärger tritt fast immer bei disziplinarischen Verfehlungen oder einem Mangel an Motivation und/oder Aufmerksamkeit auf Seiten der Schüler auf. Angst wird zumeist in Verbindung mit neuen, unbekannten Situationen genannt, kann aber auch dann vorkommen, wenn die Lehrer sich beobachtet fühlen. Auch die festgestellten Zusammenhänge zwischen den subjektiv bewerteten Niveaus der Schüler hinsichtlich Leistung, Aufmerksamkeit bzw. Motivation und Disziplin bzw. den Lehrer-Selbstwirksamkeitsüberzeugungen hinsichtlich Verständnisvermittlung, Schüler-Engagement und „Classroom-Management“ einerseits und der Häufigkeit des Auftretens der verschiedenen Emotionen andererseits passen sehr gut zu den theoretischen Überlegungen. Hierbei fällt auf, dass manchmal die Bewertung der unterschiedlichen Niveaus, manchmal die Überzeugung zur eigenen Wirksamkeit den Ausschlag für das Auftreten einer bestimmten Emotion gibt. Aus diesem Grund sollten hier stets beide Aspekte berücksichtigt werden.“ (ebd., S. 169f.)

Finden Sie sich in den geschilderten Typen von Lehrenden wieder? Scheinen Ihnen die Überlegungen dazu plausibel? Möchten Sie mehr über die Ergebnisse empirischer Studien zu realitätsbezogenem Mathematikunterricht wissen? Dann machen wir wiederum eine Suchaufgabe für Sie daraus – und helfen Ihnen mit einem Tipp bei der Suche, dem erneuten Hinweis auf ISTRON. Hier finden Sie sowohl die Namen von Forscherinnen und Forschern wie W. Blum, R. Borromeo-Ferri, G. Kaiser, K. Maaß, S. Schukajlow und vielen anderen ebenso wie die Titel oder Kurzzusammenfassungen von Forschungsergebnissen, über die im Laufe von ISTRON Tagungen vorgetragen wurde. An Hand dieser Hinweise können Sie dann Veröffentlichungen auswählen, die Sie genauer lesen wollen.

Sind Sie im Zuge Ihrer Recherchen auch auf das Kürzel ICTMA (http://www.mathunion.org/icmi/icmi/affiliate-organizations/study-groups/ictma/) gestoßen? ICTMA, the International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications – das ist im Themenbereich ‚realitätsbezogener Mathematikunterricht' die Tür zur weiten Welt. Auch hier gibt es viele Namen, Tagungen, Vorträge und Veröffentlichungen für alle, die Texte zum Thema in Englisch lesen wollen und können.

Kapitel 4: Erste Schritte – Wege zum Öffnen des Mathematikunterrichts

Wie werden aus typischen Schulbuchaufgaben motivierende offene Aufgaben? Selbstständiges Problemlösen lernen mit leicht veränderten Schulbuchaufgaben. Viele Beispiele aus verschiedenen Themengebieten und Schulstufen

Als Mathematiklehrerin bzw. als Mathematiklehrer sind Sie gewohnt, Aufgaben zu stellen. Das ist auf den ersten Blick sehr einfach, wenn es sich um Aufgaben handelt, die einfach zu formulieren sind, z. B. „Berechne: 5 + 8 = ?“ oder „Für welche reellen Zahlen x gilt $x^2 = (x – 2) + (x + 2)$?“

Die einfache Additions-Aufgabe kann schlimmstenfalls durch einen Tippfehler problematisch werden, wenn etwa statt 5 + 8 dort 5 – 8 steht und negative Zahlen noch nicht bekannt sind. Mit dem Beispiel „Geld ausgeben“ lässt sich das durch eine Erläuterung zum „Schulden machen“ sicherlich gehaltvoller erklären.

Für das zweite Beispiel gibt es durch den Tippfehler * statt + zwischen den Klammern rechts, also $x^2 = (x – 2) * (x + 2)$ keine Lösung, weil Null nicht gleich Vier ist. Wenn solch ein Tippfehler passiert, kommt es auf die Unterrichtssituation an. Wenn in einer Übung für eine Schularbeit noch einmal getestet werden soll, ob die Lernenden sich an die Möglichkeit erinnern, dass quadratische (und andere) Gleichungen auch einmal keine Lösung haben können, passt die Aufgabe gut. Wenn aber gleich bei den ersten Übungsaufgaben zum Thema quadratische Gleichungen ein Tippfehler passiert ist und statt „+“ ein „*“ getippt wurde, kommt statt der geplanten leicht lösbaren Berechnung von x in $x^2 = 2x$ (also x = 2 oder x = 0) eine vielleicht bis dahin noch nicht erwähnte Möglichkeit heraus: Keine Lösung! Das kann dann je nach Situation sofort oder später besprochen werden, stört aber vermutlich die Unterrichtsplanung für diese Stunde.

Herausforderungen beim Stellen von Mathematikaufgaben

Die beiden Beispiele sollen daran erinnern, dass das Erstellen von Mathematikaufgaben eine anspruchsvolle Aufgabe ist, insbesondere dann, wenn man genau die Fakten, Kenntnisse oder Fertigkeiten abfragen möchte, die es abzufragen gilt. Selbst bei scheinbar einfach zu stellenden Aufgaben, in denen ausschließlich mathematische Symbole verwendet werden, ist es nicht immer einfach, präzise und korrekt das zu formulieren, was gefragt bzw. erwartet wird. Nicht zuletzt bestimmt die Art der Aufgabenstellung auch die anschließende Bewertung: Ist die Aufgabe richtig gelöst? Offensichtlich führen Unklarheiten in der Aufgabenstellung leicht dazu, dass anschließend auch unklar bleibt, was richtig und was falsch gelöst ist. Das Korrigieren bzw. Beurteilen wird schwieriger.

Noch herausfordernder ist die Situation bei Textaufgaben. Vielleicht ist es Ihnen bei ersten selbst formulierten Textaufgaben so wie uns ergangen: wir dachten, die Aufgabe sei korrekt gestellt, gut verständlich und zudem auch noch motivierend, weil ein Bezug zur Lebenswelt erkennbar ist. Einige Schülerinnen und Schüler haben das jedoch anders gesehen! Sie haben die Aufgabenstellung nicht so verstanden, wie wir sie intendiert hatten, fanden die Aufgabe genau so wenig motivierend wie jene, von denen wir uns abgrenzen wollten und hielten die Aufgabe z. T. sogar für verwirrend oder gar unlösbar.

Bevor wir uns gleich der spannenden Frage zuwenden, wie wir Sie trotz all der angedeuteten Herausforderungen beim Stellen von Aufgaben dazu ermutigen und befähigen können, neue Typen von Aufgaben für realitätsbezogenen Mathematikunterricht zu stellen, weisen wir noch auf einen Punkt hin, den wir aus einer Fortbildung von Deutschlehrerinnen und Deutschlehrern gelernt haben. Einer Gruppe von Deutschlehrerinnen und Deutschlehrern ist aufgefallen, in welch für sie merkwürdigem Deutsch die Textaufgaben im Mathematikunterricht formuliert wurden. Sie haben uns eingeladen, um mit uns zu diskutieren, wie sich die Sprache verbessern lässt. Wir haben in Arbeitsgruppen und anschließend gemeinsam versucht, typische Aufgaben aus dem Schulbuch so umzuformulieren, dass sie einerseits in den Augen der Deutschlehrerinnen und Deutschlehrer sprachlich besser wurden und andererseits für die Schülerinnen und Schüler verständlich und lösbar bleiben. Die anwesenden Lehrerinnen und Lehrer haben dabei wechselseitig die von den Kolleginnen und Kollegen gestellten Aufgaben zu lösen versucht – und sind oft am Text gescheitert, weil sie dem schöner formulierten Text nicht (bzw. schlechter als dem ursprünglichen Text) entnehmen konnten, was eigentlich von ihnen verlangt wurde. Als Ergebnis haben wir festgehalten, dass Textaufgaben im Schulbuch oft in einer Kunstsprache geschrieben werden, die zwar nicht besonders schön klingt, aber oft ein Höchstmaß an Präzision, Eindeutigkeit und Kürze verbindet. Stellen Sie sich umgekehrt ein Gedicht oder eine Prosa vor, die diese drei Kriterien optimal erfüllt: Nehmen Sie ein Gedicht, eine Reisebeschreibung oder einen Roman und formulieren Sie diese Texte so um, dass sie auch ein Höchstmaß an Präzision, Eindeutigkeit und Kürze auszeichnet. Ohne Ihre literarischen Fähigkeiten kritisieren zu wollen, vermuten wir, dass Sie für den mathematisch-sprachlich optimierten Text keinen Literaturnobelpreis erhalten werden. Der Grund für unsere Vermutung ist einfach: Gute Aufgabentexte und literarisch schöne Texte werden nach sehr unterschiedlichen Kriterien geschrieben und bewertet.

Fassen wir die einleitenden Überlegungen zur Aufgabenstellung zusammen, so können wir schreiben, dass es sicher nicht einfach ist, Aufgaben gut zu stellen. Die Formulierung verlangt eine hohe Konzentration, weil schon kleine Fehler (z.B. beim Vorzeichen) große Probleme machen können, die Anforderung an Präzision, Eindeutigkeit und Kürze, die bei gut formulierten Schulbuchaufgaben eingehalten werden, setzen Maßstäbe und trotz Kritik von außen gibt es gute Gründe dafür, die spezielle Sprache von Textaufgaben beizubehalten.

Zur didaktischen Qualität von Aufgaben – neue Wege öffnen

Bisher haben wir es bewusst vermieden, über die *didaktische* Qualität von Aufgaben zu schreiben. Selbstverständlich gibt es gut formulierte Aufgaben, die eine geringe didaktische Qualität haben und umgekehrt solche, die zwar eine gute didaktische Absicht haben, sie aber schlecht formulieren. In anderen Zusammenhängen wird zudem über die Dialektik von Form und Inhalt nachgedacht – beides steht sicher nicht beziehungslos nebeneinander, sondern in Wechselwirkung zueinander.

Was ist eigentliche eine „didaktische Qualität“ von Aufgaben? Hier bitten wir Sie wieder um Ihre Mitarbeit. Notieren Sie bitte, welche didaktische Qualität aus Ihrer Sicht eine Aufgabe im Mathematikunterricht haben kann. Was haben Sie notiert?

Etwas üben? Sehr häufig werden Aufgaben gestellt, um etwas Gelerntes zu üben. Wenn eine Formel zur Zinsrechnung an die Tafel geschrieben wurde, folgen eine Reihe Aufgaben zur Berechnung dieser. Wenn erläutert wurde, wie zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten zu lösen sind, folgen eine Reihe von Aufgaben zur Thematik linearer Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten usw.

Etwas verstehen? Hinter den vielen Übungsaufgaben steht nicht selten die Absicht, dass die Lernenden durch das Lösen passender Aufgaben verstehen, was zuvor „nur“ erläutert wurde. Wenn etwa der Satz von Pythagoras samt Beweis an der Tafel steht, aber den Schülerinnen und Schülern noch nicht recht klar ist, was er eigentlich bedeutet oder aussagt, können eigene Berechnungen zum Verständnis beitragen.

Für diese beiden Kriterien von Aufgaben gibt es erfahrungsgemäß mehr oder wenige gute Aufgaben. Einige sind zu leicht, andere zu schwer, einige sind schlecht formuliert und andere sind zu wenig typisch für die Art von Aufgabe, die trainiert werden soll. Wieder andere Aufgaben sind in jeder Hinsicht gut durchdacht, didaktisch wertvoll und dennoch nicht erfolgreich, weil Schülerinnen und Schülern, die sie in der Vorbereitung gut gelöst haben, im Test mit einer ähnlichen Aufgabe nichts anzufangen wussten. Damit erinnern wir eine dritte Möglichkeit, Aufgaben zu bewerten, nämlich an ihrem Erfolg im praktischen Einsatz. Dieser „Erfolg“ wiederum kann im Unterricht durch Lernende und Lehrende als solcher empfunden werden – oder empirisch beforscht. Im ersten Fall geht es um den konkreten Erfolg vor Ort, im zweiten um eher verallgemeinerbare Aussagen, etwa zur Verständlichkeit von Aufgabenformulierungen, zum Bezug zwischen Unterricht, Lehrzielen, Kompetenzerwerb und Aufgabenstellung.

Aufgaben die das Kriterium „didaktisch gut“ erfüllen (sollen) sind in der Regel mit dem Attribut „Aufgaben für einen nachhaltigen Lernerfolg“

versehen. Das bezieht einen ganz wichtigen Perspektivenwechsel bei der Beurteilung einer Aufgabe ein: Aus der Sicht von Menschen, die Aufgaben stellen, sehen Aufgaben oft anders aus als aus der Sicht von Menschen, die sie lösen sollen. Wenn wir *nachhaltigen* Lernerfolg als zentrales Kriterium für die didaktische Qualität einer Aufgabe festhalten, verweisen wir damit zugleich auf die Notwendigkeit, Aufgaben in der Praxis zu erproben und ihre Erprobung empirisch zu erforschen, bevor wir sie letztendlich beurteilen. Wenn das Kriterium „Nachhaltigkeit" untersucht werden soll, ist es empfehlenswert, Längsschnittstudien einzusetzen, also die Lernenden über einen längeren Zeitraum (bzw. mit einem größeren zeitlichen Abstand zum entsprechenden Unterricht) erneut zu testen bzw. zu interviewen um festzustellen, welche Kenntnisse, Fähigkeiten und Kompetenzen sie „auf Dauer" oder eben *nachhaltig* erworben haben.

Wir wollen an dieser Stelle die Überlegungen zu üblichen Aufgaben nicht weiter vertiefen. Falls Sie an diesem Thema mehr interessiert sind, empfehlen wir die entsprechende Literatur (etwa von Padberg, Malle, Bruder, Leuders, et. al.)

Haben Sie ein Stichwort wie „**offene Aufgaben**" notiert? Dann werden Sie mit besonderer Aufmerksamkeit lesen, dass wir das Öffnen von Mathematikaufgaben als einen Weg zum realitätsbezogenen Mathematikunterricht vorschlagen. Wie geht das?

Beginnen wir mit einigen Beispielen. Nehmen wir an, die Ausgangsaufgabe lautet: Heinrich möchte ein Buch kaufen, das 14,90 Euro kostet. Er hat 20 Euro. Wie viel Geld bleibt ihm? Dann werden die Schülerinnen und Schüler, die richtig rechnen, als Antwortsatz schreiben: Heinrich behält 5,10 Euro und diesen Satz doppelt unterstreichen. Fertig.

Wir schlagen vor, die Aufgabe wie folgt zu stellen: *Heinrich hat zum Geburtstag ein Buch von Astrid Lindgren geschenkt bekommen: „Karlsson vom Dach", das er gern gelesen hat. Nun hat er im Internet ein weiteres Buch von Astrid Lindgren entdeckt: „Geschichten aus Bullerbü". Die Geschichten kosten bei Amazon 14,90 Euro. Heinrich hat noch die 20 Euro, die ihm sein Onkeln zum Geburtstag geschenkt hat. Was soll Heinrich tun?*

Besprecht in Kleingruppen, welchen Rat ihr Heinrich geben wollt!

Mit dieser Formulierung ist offener, was die Schülerinnen und Schüler als Empfehlung für Heinrich aussprechen. Die Rechnung, nach der er 5,10 Euro behält, wenn er das Buch kauft, ist eher Nebensache, nur eine mögliche Lösung von vielen. Andere Lösungen könnten sein: Er soll sich das Buch leihen, von einem Freund oder aus der Bibliothek. Oder er soll schauen, ob es das Buch irgendwo gebraucht zu kaufen gibt. Oder er soll das Buch auf seine Wunschliste zu Weihnachten schreiben. Weitere Ideen und Möglichkeiten lassen sich sicherlich noch finden.

Offensichtlich rückt die Rechnung vom Zentrum eher an den Rand. Die Frage, wie viel Geld Heinrich übrig behält, wenn er das Buch kauft, ist eine von mehreren. Eventuell kann das Ergebnis dieser Berechnung dazu beitragen, nach anderen Lösungen zu suchen, die nicht so teuer sind. Das ist ausgesprochen realitätsnah. Aber es nicht üblich, für solche Betrachtungen im Mathematikunterricht Zeit aufzuwenden. In der Zeit, in der nach anderen Möglichkeiten gesucht wird, das gewünschte Buch lesen zu können, ist ja nicht Mathematikunterricht im üblichen Verständnis, sondern eher Lebenskunde. Diese Zeit geht für weitere Übungsaufgaben zum selben Thema verloren.

Das ist der zentrale Punkt der Diskussion (auch in der Mathematikdidaktik insgesamt), die wir mit Ihnen, liebe Leserinnen und Leser führen wollen: Was ist im Mathematikunterricht wirklich wichtig? Wir meinen, dass es sehr genau im Sinne der staatlich gesetzten Ziele für den Mathematikunterricht ist, wenn die Schülerinnen und Schüler aus der Überlegung, welchen guten Rat sie Heinrich geben sollen, für sich selbst die gesammelten Ratschläge samt der Abwägung der Qualität dieser Ratschläge in der Schulklasse nutzen und sich merken, wie sie ein Buch erhalten können, das sie lesen wollen. Um Missverständnisse zu vermeiden, betonen wir auch an dieser Stelle, dass wir nicht dafür plädieren, ausschließlich realitätsbezogen Mathematik zu unterrichten.

Nehmen wir ein anderes Beispiel. In den Übungen zur Zinsrechnung finden wir häufig Aufgaben, in denen ausgerechnet werden soll, wie viel Geld jemand haben wird, der z.B. 100000 Euro für 10 Jahre mit einem festen Zinssatz anlegt. Ein Fachbegriff wie „Kapitalsparbuch“ wird meist vermieden, in aktuellen Aufgaben ist der Zinssatz geringer als in früheren. Wir schlagen vor, stattdessen folgende Aufgabe zu stellen: *Silvia erhält zum 14. Geburtstag von ihrer Tante 5000 Euro geschenkt, die sie für 5 Jahre fest anlegen soll, damit sie zum 19. Geburtstag über möglichst viel Geld verfügen kann. Was soll Silvia mit dem Geld machen? Geht zu verschiedenen Banken und schaut im Internet (bei Onlinebanken) nach. Besprecht die Angebote, die ihr gefunden habt, in Kleingruppen und präsentiert einen Vorschlag. In der Präsentation muss mitgeteilt werden, wie viel Geld Silvia nach 5 Jahren tatsächlich besitzen wird und welche Risiken und Ungewissheiten mit dieser Anlage verbunden sind. Tragt bitte die Angaben der Bank zu Zinsen, Gebühren und Auszahlungen in eine Tabelle und überprüft, ob die Angaben stimmen (das geht gut mit einer Tabellenkalkulation!) Aufgrund der Präsentationen und der anschließenden Beratung wird ein Vorschlag ausgewählt. Die Gruppe, die diesen Vorschlag gemacht hat, erhält einen Preis!*

Mit einer solchen oder ähnlichen Aufgabenstellung wird aus einer kleinen Übungsaufgabe ein echtes realitätsnahes Projekt. Wir wiederholen hier nicht die Pro- und Contra Diskussion mit Argumenten zum Thema Zeit, Stofffülle und allgemeine Lehrziele. Selbstverständlich ist es wünschenswert, dass die Schule den Lernenden dabei hilft, mit ihrem Geld rational umzugehen und die dazu notwendigen Berechnungen der Zinsen ebenso gut beherrschen wie die Analyse des Kleingedruckten, in dem über die Konditionen von Guthaben und Kredit bestimmt wird.

Analyse des Kleingedruckten - Lesekompetenz fördern im Mathematikunterricht?

Und wieder hören wir die Frage: Gehört das zum Mathematikunterricht? Sollte diese Kompetenz nicht im Deutschunterricht vermittelt und im Mathematikunterricht bei Bedarf genutzt werden?

Ohne ins Detail zu gehen, möchten wir an dieser Stelle darauf hinweisen, dass es nicht nur eine große einheitliche Lesekompetenz für alle Arten von Texten gibt, sondern durchaus spezifische Lesekompetenzen für unterschiedliche Arten von Texten. Wir interpretieren das wie folgt: Zum kompetenten Lesen von fachspezifischen Texten braucht es einen entsprechenden fachlichen Hintergrund. Auch wer ohne Probleme mit den Fremdwörtern und Fachbegriffen einen Text zum Steuerrecht, zur Synthese von bestimmten organischen Verbindungen aus Erdöl, zur Diagnose von Lebererkrankungen oder zu anderen Möglichkeiten eines Beweises des Vierfarbensatzes liest, kann sie oft ohne einschlägige Fachkenntnisse nicht verstehen. Ganz andere Hintergrundkenntnisse sind verlangt, wenn ein Text über Trainingsmethoden im Radsport, die literarische Qualität eines neuen Theaterstückes oder über Lebensumstände von Piraten vor Somalias Küsten verstanden werden soll.

Wir gehen davon aus, dass kein anderes Unterrichtsfach außer dem Mathematikunterricht selbst bereit und in der Lage ist, eine mathematikspezifische Lesekompetenz zu vermitteln. Selbstverständlich tragen der Deutschunterricht und in gewissem Umfang auch der Unterricht in naturwissenschaftlichen und technischen Fächern zur mathematikspezifischen Lesekompetenz bei, letztendlich muss diese Kompetenz aber im Mathematikunterricht selbst erworben werden. Genauso offensichtlich erscheint es uns, dass eine solche Kompetenz hauptsächlich durch die tatsächliche Auseinandersetzung mit mathematikhaltigen Texten im Mathematikunterricht erworben werden kann. Solche mathematikhaltigen Texte sind etwa Tarifinformationen oder Werbungen für Geldanlagen und Kredite von Banken.

Überfordern wir damit nicht die unvorbereiteten Schülerinnen und Schüler? Bevor wir zum nächsten Beispiel kommen, gehen wir noch auf diesen typischen Einwand von Lehrerseite ein. Die Antwort ist schlicht: Ja! Wer das erste Mal und unvorbereitet einen Kreditvertrag, einen Versicherungsvertrag, einen Vertrag mit Tarifen für Strom oder Telefon liest, ist leicht und schnell überfordert. Wer nicht darauf vorbreitet wurde, im realen Leben nach der Schule über Geld verfügen zu können und über eine sinnvolle Verwendung von Geld entscheiden zu müssen, muss einer Beratung oder einer Werbung vertrauen oder selbstständig und anders Mathematik neu lernen.

Die richtige Konsequenz daraus kann aus unserer Sicht nur sein, frühzeitig und in aufbauenden kleinen Schritten damit zu beginnen, die Realität in Form von mathematikhaltigen Texten in den Mathematikunterricht hinein zu holen. Hier kann gemeinsam gelernt und geübt werden, die gesuchten Informationen zu finden und die im Text enthaltenen Angaben mathematisch zu analysieren, um darauf Argumente für Entscheidungen zu formulieren.

Noch kleinere Schritte? Selbstständiges Problemlösen lernen mit leicht veränderten Schulbuchaufgaben

Wir möchten Sie ermuntern, zunächst eine klassische Textaufgabe aus dem Schulbuch zu nehmen und eine Angabe hinzuzufügen, die nichts mit der Aufgabe zu tun hat.

Wir nehmen dazu eine fiktive Aufgabe: *Eine Zustellfirma fährt Pakte von Wien nach Linz (180 km) und nach Salzburg (das liegt noch einmal 120 km weiter Richtung Westen). Wie weit muss der Kleinlastkraftwagen von Wien nach Salzburg fahren?*

Nun fügen wir noch etwas Text hinzu: *Eine Zustellfirma fährt 264 Pakte von Wien nach Linz (180 km) und 125 Pakte nach Salzburg (das liegt noch einmal 120 km weiter nach Westen). Wie weit muss der Kleinlastkraftwagen von Wien nach Salzburg fahren?*

Dürfen wir Sie bitten, eine solche Aufgabenvariation einmal zu testen? Wie viele Schülerinnen und Schüler addieren die Pakte statt der Kilometer? Wie viele addieren Pakte und Kilometer? Ähnliche Aufgaben haben wir bei finden sich bei Stella Baruck (1998).

Vielleicht kennen Sie eine Variante dieser Aufgabe: Ein 53 Jahre alter Busfahrer beginnt seine Tour am Hauptbahnhof. 32 Fahrgäste steigen dort ein. An der ersten Haltestelle steigen drei Fahrgäste aus und 5 ein. An der zweiten Haltestelle steigen 7 Personen aus. Wie viele Fahrgäste sind auf dem Weg zur dritten Haltestelle im Bus?

Lassen sich Ihre Schülerinnen und Schüler durch die nicht benötigte

Altersangabe verwirren? Addieren sie die 53 aus der Altersangabe zu den Fahrgästen? Was machen Ihre Schülerinnen und Schüler, wenn die Abschlussfrage anders lautet: *Ein 53 Jahre alter Busfahrer beginnt seine Tour am Hauptbahnhof. 32 Fahrgäste steigen dort ein. An der ersten Haltestelle steigen drei Fahrgäste aus und 5 ein. An der zweiten Haltestelle steigen 7 Personen aus. Wie alt ist der Busfahrer?*

Wir empfehlen zum Test noch eine Variante dieser Aufgabe: *Ein Busfahrer beginnt seine Tour am Hauptbahnhof. 32 Fahrgäste steigen dort ein. An der ersten Haltestelle steigen drei Fahrgäste aus und 5 ein. An der zweiten Haltestelle steigen 7 Personen aus. Wie alt ist der Busfahrer?* Berechnen Ihre Schülerinnen und Schüler das Alter aus der Anzahl der Fahrgäste? Machen das überhaupt irgendwelche Schülerinnen und Schüler? Ja! Dazu liegen Ergebnisse empirischer Forschung vor: „Im Jahr 1989 erregte das Buch „Wie alt ist der Kapitän?“ von Stella Baruk großes Aufsehen. 76 von 97 befragten Zweit- und Drittklässlern hatten die Aufgabe „Auf einem Schiff befinden sich 26 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?“ „gelöst“, üblicherweise mit „36 Jahren“. Eine Ausweitung der (französischen) Untersuchung auf mehr Aufgaben und mehr Schüler auch anderer Jahrgangsstufen bestätigte das erschütternde Ergebnis. Auch andere Untersuchungen (USA, D) ergeben das Bild: Während sich Vorschulkinder zu 90% weigern, solche Aufgaben zu rechnen, werden Kapitänsaufgaben von einem ansteigenden Anteil von Grundschulkindern „gelöst“, der erst ab Klasse 5 wieder unter 50% sinkt.“ (S. Müller-Philipp Sachrechnen, S. 115, http://wwwmath.uni-muenster.de/u/susanne.mueller-philipp/pdf/Sachrechnen Kap.5,5.3-5.4.pdf)

Noch eine dritte Möglichkeit zur Veränderung von Schulbuchaufgaben öffnet den Mathematikunterricht und führt schnell und leicht zu Situationen, in denen der Unterricht viel interessanter wird als üblich. Ersetzen Sie eine Information durch eine Frage. So wird aus dieser Aufgabe etwa Neues: *Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Seiten a = 4 cm und b = 3 cm. Wie lang ist die Seite c?* **Neu**: *Gegeben ist ein Dreieck mit den Seiten a = 4 cm und b = 3 cm. Wie lang ist die Seite c? Für welchen Winkel Gamma lässt sich diese Aufgabe mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnen?*

Oder: *Gegeben ist die Gerade f(x) = 4x + 5. In welchen Punkten schneidet sie die x Achse und die y Achse?* **Neu**: *Gegeben ist die Gerade f(x) = a * x + 5. Für welche Werte von a schneidet sie die x Achse und die y Achse nicht?*

Oder: *Gegeben ist eine stetige reelle Funktion, auf der die Punkte (-3; -3) und (2; 2) liegen. Beweisen Sie, dass mindestens ein Punkt auf der x Achse auch auf der Funktion liegt.* **Neu**: *Gegeben ist eine stetige reelle Funktion, auf der die Punkte (-3; -3) und (2; 2) liegen. Unter welchen Voraussetzungen schneidet die x Achse in genau einem Punkt?*

Wir haben hier einleitend Beispiele ohne Realitätsbezug gewählt, um zu verdeutlichen, dass schon kleine Veränderungen von üblichen Aufgaben zu ungewohnten Perspektiven führen und dazu beitragen können, den Unterricht interessanter zu machen. Bisweilen ist auch sinnvoll, solche Aufgabenvarianten als Zusatzaufgaben oder Hausaufgaben zu stellen.

Viele Beispiele für stärkeren Realitätsbezug aus verschiedenen Themengebieten und Schulstufen

Nehmen wir an, Sie sind überzeugt und wollen beginnen, realitätsbezogen Mathematik zu unterrichten. Sie überlegen sich, in welcher oder welcher/n Klasse/n Sie etwas erproben wollen und zu welchem Thema Sie etwas planen wollen. Wir empfehlen Ihnen, in dieser Situation einen Blick auf www.mued.de zu werfen.

Andere nützliche Quellen für Unterrichtsvorschläge sind die Zeitschrift „mathematik lehren“ (erscheint beim Friedrich Verlag) und die Schriftenreihe „ISTRON“ (bis zum Jahre 2013 beim Verlag Franzbecker, seither bei Springer, z.T. auch über das Internet einsehbar bei http://userpages.uni-koblenz.de/~mathe/istron/istron_web/.

Wir ergänzen an dieser Stelle einige Vorschläge, wie aus Schulbuchaufgaben kleine Unterrichtseinheiten werden. Dazu wählen wir verschiedene Aufgaben aus zufällig gewählten Schulbüchern für verschiedene Schulen und Altersstufen.

Was können wir aus dieser Aufgabe machen? *Ein Sportverein mietet für eine Fahrt einen Bus um 120 Euro. Diese Kosten werden gleichmäßig aufgeteilt. Wären zwei Personen mehr mitgefahren, hätten sich die Kosten für jeden Teilnehmer um 0,25 Euro verringert. Bestimme die Teilnehmerzahl.“* (Dorner, 5. Klasse, Aufgabe 11 c, S. 107)

Folgen wir den üblichen Pfaden, übersetzen wir den Text in Gleichungen und errechnen, dass ursprünglich 30 Teilnehmer je 4 Euro zahlen sollten, aber 32 Teilnehmer nur 3,75 Euro pro Person zahlen. Das ist realistisch, aber doch irgendwie künstlich. Was schlagen wir vor?

Zunächst ersetzen wir einen hypothetischen Sportverein durch die Schulklasse selbst, z.B. bei einem geplanten Ausflug (Wandertag, Exkursion). Dann überlegen wir, in welcher Situation zusätzliche Personen mitfahren. Eine Möglichkeit ist, dass für den Ausflug weitere Schülerinnen oder Schüler mitfahren (aus der Parallelklasse, oder wegen eines besonderen Anlasses zwei Geschwister einer Schülerin oder eines Schülers). Vielleicht werden auch zusätzliche Aufsichtspersonen benötigt. Nach unserem Vorschlag lautet die Aufgabe dann so: *Am nächsten Mittwoch soll unser Ausflug nach … stattfinden. Der Bus wird 120 Euro kosten. Wie viel Euro sind das pro Schülerin bzw. pro Schüler, wenn die Kosten auf alle gleichmäßig aufgeteilt werden? Die Eltern von Uwe haben angeboten, als zusätzliche Aufsichtspersonen mitzufahren. Wie ändert sich dadurch der Kostenanteil pro Person?*

Die Änderungen am Text sind nicht sehr umfangreich, machen aber aus einer fiktiven Situation eine Frage, die diese Schulklasse unmittelbar betrifft. Nun mag es sein, dass ein solcher Ausflug stattfindet, ohne dass in dieser Zeit quadratische Gleichungen im Mathematikunterricht behandelt werden. Wenn sie schon behandelt wurden, ist es eine gute Gelegenheit zur Wiederholung – auf quadratische Gleichungen stößt man immer wieder, sie sollten daher nicht in Vergessenheit geraten (Stichwort: Nachhaltigkeit).

Nun ein Beispiel aus der Geometrie: *Der Schatten eines 4,5 Meter hohen Baumes ist 6 m lang. Wie hoch steht die Sonne, d.h. unter welchem Winkel α treffen die Sonnenstrahlen auf dem Boden auf?* (Dorner, 5. Klasse, Aufgabe 11 c, S. 139)

Wir wollen die Aufgabe realitätsbezogener machen und fragen uns: Wen könnte das Ergebnis aus welchem Grunde interessieren? Damit eröffnen sich viele Möglichkeiten für eine Aufgabenformulierung:

Variante 1: *Familie Maier wohnt in der Eifel am Waldrand. Die bis zu 10 Meter hohen Bäume im Wald südlich von ihrem Garten werfen ihren Schatten in den Garten. Wie weit von den Bäumen entfernt soll die Familie Maier ihre Tomaten anpflanzen, wenn die Tomaten nie im Schatten stehen sollen?*

Hier fehlt bewusst eine Angabe, die benötigt wird: In welchem Winkel werfen die Bäume ihren Schatten? Das ist Absicht! Die Schülerinnen und Schüler sollen lernen, dass ihnen nicht für alles, was sie interessiert, jemand schon genau die Daten passend aufarbeitet, die sie brauchen, um etwas auszurechnen. In diesem Fall können sie schätzen oder (besser!) ein wenig über Geographie lernen bzw. nachfragen. Der Winkel hängt von dem Stand der Sonne und damit von der geografischen Breite ab. Wenn die Schülerinnen und Schüler so weit gekommen sind, fällt ihnen vielleicht noch auf, dass die Forderung „kein Schatten“ den ganzen Tag in der Wachstumszeit der Tomaten betrifft, also nicht nur den höchsten Sonnenstand zur Sommersonnenwende. Damit werden zusätzliche Informationen bzw. Annahmen oder Schätzungen notwendig. Aus einer einfachen Aufgabe zur Berechnung eines Sinuswertes ist ein kleines Gartenbau- und Geographieprojekt geworden. An dieser Stelle haben wir überlegt, ob dieses Beispiel wieder aus dem Manuskript streichen, weil es unerwartet umfangreich geworden ist.

Wir haben es nicht aus dem Buchmanuskript gestrichen, weil wir darauf hinweisen wollen, dass leichte Umformulierungen, kleine Annährungen an die Realität oft dazu führen können, dass interessante und nicht beabsichtigte Fragen auftauchen, die aber nicht so leicht zu beantworten sind. Falls Sie im Verlauf des Versuches, eine solche Frage zu beantworten, den Eindruck haben, dass dazu Algorithmen aus der Mathematik oder spezifische Daten benötigt werden, die für die Schülerinnen und Schüler nicht mit leistbarem Aufwand zugänglich ist, führen Sie eine Diskussion in der Klasse herbei, in der bilanziert wird: Was wollten wir wissen? Was haben wir erreicht? Was fehlt? Was müssten wir tun oder wissen (soweit wir das jetzt abschätzen können), um ein besseres oder vollständiges Ergebnis zu erreichen? Manchmal reicht für eine praktische Anwendung auch das bisher Geleistete, obwohl es mathematisch nicht vollständig ist. Wenn in diesem Beispiel der Garten von Familie Maier so geformt ist, das nur 10 Meter Abstand vom Zaun zum Haus sind, ist die Empfehlung für die Tomaten schlicht: Nahe am Haus pflanzen! – Auch wenn es gegen Abend oder im Spätsommer bisweilen Schatten durch die Bäume gibt.

Noch eine Anmerkung: In fast allen realitätsnahen Aufgaben stellt sich auch eine Genauigkeitsfrage, die in der Regel mit einer Überlegung zum Nutzen und Sinn in der betrachteten Praxis zu beantworten ist. Wenn im Garten etwas angepflanzt werden soll, entscheidet nicht die technische Möglichkeit der elektronischen Rechenhilfe, mit wie vielen Stellen gerechnet wird, sondern ein nachdenklicher Blick auf einen Garten. Ist es überhaupt möglich, z.B. Tomaten genauer als auf einen Zentimeter zu pflanzen? Reicht vielleicht schon eine Genauigkeit von 10 cm?

An dieser Stelle deuten wir nur, dass manchmal mit der Absicht, eine Lösung in der Praxis zu finden, auch eine Erleichterung im Umgang mit der Forderung nach einer mathematisch vollständigen und korrekten Lösung verbunden ist. Manche klassische Extremwertaufgabe aus der Sek. II lässt sich sogar ganz ohne Analysis schon in der Sek. I lösen, wenn es „nur“ darauf ankommt, eine praktikable Lösung zu finden.

Wir formulieren die Aufgabe wieder einfacher, mit **Variante 2**: *Familie Maier wohnt in der Eifel am Waldrand. Die bis zu 10 Meter hohen Bäume im Wald südlich von ihrem Garten werfen ihren Schatten in den Garten. Wie weit von den Bäumen entfernt kann die Familie Maier ihre Sitzecke im Garten planen, wenn auch im Hochsommer zu Mittag im Schatten sitzen wollen, ohne einen Sonnenschirm zu kaufen?*

Durch die Umkehrung der Frage wird die Aufgabe deutlich einfacher: Wie weit reicht der Schatten am höchsten Sonnenstand zur Sommersonnenwende? Wegen einer kleinen Überlegung zur Genauigkeit reicht sogar eine grobe Schätzung zum Winkel, etwa 50 Grad. Vielleicht wird die Überlegung wieder ein wenig komplizierter, wenn eine Person im Schatten sitzen will: Wie hoch ist dann der Kopf der Person, die z.B. 5

Meter vom Zaun entfernt sitzt? Das ökonomische Motiv (keinen Sonnenschirm kaufen müssen) kann ein wenig zur Realitätsnähe und zur Motivation beitragen.

Variante 3: *Frau Maier liebt Flieder. Sie möchte deshalb in ihrem Garten einen Fliederstrauch anpflanzen, der bis zu 4 Meter hoch wird. Wie weit muss sie ihn von der Grundstückgrenze entfernt pflanzen, damit der Nachbar im Osten sich nicht darüber beschwert, dass der Schatten des Fliederstrauches im Sommer nicht über den Gartenzaun (Höhe 1,5 Meter) reicht?*

Um diese Aufgabe zu lösen, sind ein paar Annahmen oder Überlegungen sinnvoll, die wir Ihrer Klasse durchaus zutrauen: Der Fliederbusch ist am letzten Sommertag am höchsten gewachsen, die Sonne steht an diesem Tag am tiefsten im Westen. Wenn die Sonne nicht durch das Haus des Nachbarn im Westen verdeckt wird, reicht der Schatten des Fliederbuschs gegen Abend auf jeden Fall auf das Nachbargrundstück im Osten, wenn er fast 4 Meter hoch ist.

Was nun? Wir schlagen vor, die Klasse zur Suche nach einer praktischen Lösung einzuladen. Vielleicht mag der Nachbar ja auch Flieder und freut sich, wenn der Strauch nahe an der Grenze zu seinem Grundstück aufgestellt wird. Vielleicht wünscht er nur nicht mitten im Sommer zusätzlichen Schatten, weil er an der Grundstücksgrenze sein Gemüsebeet hat. In diesem Fall kann vielleicht über die Höhe des Strauches verhandelt werden. Ist das noch Mathematikunterricht? Ja! Im realen Leben geht es ja auch darum, reale Probleme in der Praxis mit Hilfe der Mathematik zu lösen. Wenn ausgerechnet wurde, dass es für einen Wunsch unter den gegebenen Rahmenbedingungen keine Lösung gibt, ergibt sich aus der Berechnung ein deutlicher Hinweis auf die Notwendigkeit von Kommunikation, von Verhandlungen mit dem Ziel, die Rahmenbedingungen so zu ändern, dass ein Kompromiss möglich wird. Im realen Leben geht es nicht darum, möglichst viel zu rechnen, um einen bestimmten Algorithmus zu üben.

Dieses Kapitel abschließend weisen wir noch auf eine besonders empfehlenswerte Literatur zum Thema, die Blütenaufgaben von R. Bruder (http://www.mister-mueller.de/mathe/Ma_unterricht/Ma_Elemente/Ma_elemente_Bluetenaufgaben.html). Blütenaufgaben? Was ist das? Hoffentlich haben wir Sie neugierig gemacht und Sie schauen nach!

Kapitel 5: Zweite Schritte: Kleine Modellierungen

Viele Beispiele aus verschiedenen Themengebieten und Schulstufen

Im letzten Kapitel haben wir ausgehend von Schulbuchaufgaben überlegt, was uns zu den Aufgaben und darin angedeuteten Realitätsbezügen einfällt, um sie aktueller und interessanter zu gestalten. Dabei haben wir versucht deutlich zu machen, wie dies umgesetzt werden kann. In diesem Kapitel gehen wir anders herum vor. Wir nehmen Anregungen aus dem Alltag auf und machen daraus kleine Unterrichtseinheiten. Welche Anregungen können das sein? Oft sind es Berichte aus Zeitungen und Zeitschriften, Situationen aus Beruf und Alltag oder Phänomene aus Natur und Technik, die uns oder anderen auffallen. In einigen Fällen haben wir Ausarbeitungen von Studierenden aus unseren Lehrveranstaltungen als Ausgangspunkt genommen (und dabei selbstverständlich die Studierenden als Ideengeber erwähnt).

Aus dieser anderen Vorgangsweise ergibt sich eine wichtige Konsequenz für die Unterrichtsvorschläge. Im letzten Kapitel sind wie von Aufgaben ausgegangen, die klar und eindeutig einem bestimmten Teilgebiet der Mathematik zugeordnet sind. Wenn wir uns in diesem Kapitel von der Neugier und dem Wunsch, die Welt besser zu verstehen, dazu leiten lassen, Phänomene aufzugreifen, Medienmeldungen nachzugehen oder Fragen zu beantworten, die aus Beruf und Alltag erwachsen, haben wir nicht immer eine eindeutige Zuordnung zu einem Stoffgebiet einer bestimmten Schulstufe. Aus unserer Erfahrung ist es sogar eher üblich, dass verschiedene mathematische Methoden zur Lösung herangezogen werden können oder müssen. Im Zuge der genaueren Untersuchung einer Grafik aus einer Zeitschrift brauchen wir z.B. etwas Wissen aus der beschreibenden Statistik. Dabei stoßen wir zusätzlich auf eine Frage, die wir mit einer linearen Gleichung oder einer geometrischen Betrachtung lösen können. Für den Schulunterricht ist das ungewohnt, das Denken und Üben in kleinen Schubladen mit spezifischen Aufschriften ist einfacher.

Aus Sicht der Mathematikdidaktik ist aber genau diese Verbindung von Stoffgebieten sehr wichtig für ein langfristiges Erlernen von

Mathematik. In der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) gibt es eine eigene Arbeitsgruppe dazu. Im Vorwort des Materialbandes mit vielen Aufgaben zu den ersten drei Bänden der Reihe „Mathe vernetzen“ schreiben die Herausgeber: *Ziel des Unternehmens ist es, den Schülerinnen und Schülern zu einem besseren Verständnis von Mathematik, zu mehr Motivation für das Lernen von Mathematik und zu mehr Wissen über Beziehungen der einzelnen Stoffgebiete innerhalb der Mathematik sowie zur Arbeits- und Lebenswelt zu vermitteln. Entgegen der vorherrschenden Tendenz, Mathematik in kleine Teilgebiete zu unterteilen, die möglichst unabhängig voneinander jeweils für die nächste Schularbeit zu lernen - und dann risikolos wieder zu vergessen sind, halten wir das Lernen und Lehren von Mathematik als Beziehungsgeflecht, als vernetztes Wissen für einen guten Weg zu nachhaltigem und sinnvollem Lernen.“* (Brandl, Brinkmann, Maaß, 2013, S. 1). Noch eine zusätzliche Anforderung? Vernetzen, also Verbindungen zwischen verschiedenen mathematischen Teilgebieten und der Welt? Wir gehen auf diese Frage hier nicht näher ein und verweisen auf die Argumente von Maaß und Wildt (2012).

Bevor wir mit den Beispielen beginnen, weisen wir noch darauf hin, dass es einer spezifischen Aufmerksamkeit bedarf, um im Alltag, in Medienbeiträgen etc. etwas zu sehen, das sich zu einer realitätsbezogenen Mathematikunterrichtseinheit aufarbeiten lässt. Wir nennen es den „Mathematischen Blick“ (vgl. Maguire o. J. oder G. Androsch u.a. 2014). Solch ein Blick ist eine Fähigkeit, die sich leicht entwickeln und schulen lässt; nach einer gewissen Anlaufzeit fallen immer mehr Möglichkeiten in den Blick.

Ziel dieses Kapitels soll sein Ihnen einerseits (viele) Beispiel an die Hand zu geben und andererseits, dabei zu helfen, selbst solche Beispiele zu entwickeln. Deshalb behalten wir den interaktiven Stil bei: Wir ersuchen Sie immer wieder zur Mitarbeit, stellen Fragen und fordern zu selbstständiger Aktivität auf.

„Roll It“

Die Idee zum folgenden Beispiel verdanken wir Frau L. Huber, die im Sommersemester 2014 eine Mathematikunterrichtseinheit für das Fachdidaktische Seminar in Linz vorbereitet hat.

Überblick: Ausgangspunkt ist der angekündigte Gastaufenthalt eines Rollstuhlfahrers bei einer Familie, die in einem Mietshaus wohnt. Nach dem Eingang muss man zwei Stufen steigen, bis man auf der Höhe ist, auf der ein Lift hält. Eine Rollstuhlrampe soll deshalb den Besuch erleichtern. Auf der Basis von Berechnungen am Dreieck und Informationen zum Rollstuhlfahren soll entschieden werden, welche Rollstuhlrampe geeignet ist.

Frage: Wie würden Sie diese Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung:

Wir schlagen vor, die Aufgabe mit einer kleinen Geschichte zu rahmen, etwa so: *Im Rahmen eines Programmes zum internationalen Austausch von Schülerinnen und Schülern hat unsere Schule Kontakt mit einer Schule in Malmö in Schweden aufgenommen. Die schwedischen Schülerinnen und Schülern sollen für vier Wochen hier wohnen, während die Schülerinnen und Schülern von hier in Schweden bei den Eltern der Austauschschülerinnen und –schüler untergebracht werden. Die Klasse 1b, die von der Schulleitung für den Austausch ausgewählt wurde, hat nun eine Frage an uns, die sie selbst nicht beantworten können. Ein Schüler aus Schweden, Lars, ist Rollstuhlfahrer. Er soll bei Familie Huber wohnen. Das Problem dabei ist, dass die Hubers im zweiten Stock eines Miethauses wohnen und der Lift nicht direkt bei der Eingangstür hält, sondern auf dem ersten Treppenabsatz. Man muss also erst 2 Stufen steigen, um in den Lift zu kommen. Mit dem Rollstuhl kann man nicht 2 Stufen steigen. Deshalb hat die Klasse 1b überlegt, eine Rampe zu verwenden. Sie können aber nicht ausrechnen, wie lang die Rampe sein muss und in welchem Winkel sie steigt. Können wir der ersten Klasse helfen?*

1. Arbeitsauftrag an die Schulklasse:
   - Bildet Gruppen von drei oder vier Schülerinnen bzw. Schülern.
   - Überlegt, welche Informationen Ihr benötigt, um die Frage der Klasse 1b zu beantworten
   - In 10 Minuten sammeln wir die Resultate an der Tafel

   Sammelphase: Welche Informationen werden gebraucht?
   Was haben Sie dazu notiert? Wir listen folgende Punkte auf:
   1. Wie sieht das Treppenhaus aus? Gibt es genug Platz für eine Rampe?
   2. Welche Rampen gibt es? Wo?
   3. In welchem Winkel darf die Rampe steigen, damit sie überhaupt für einen Rollstuhl benutzbar ist?

Ad 1) Nach der Eingangstür sind erst die Briefkästen, dann beginnt die Treppe. Es ist also genug Platz für eine Rampe, die länger als die Treppe selbst ist. Die Stufen sind 18,5 cm hoch, 120 cm breit und 30 cm tief.

Ad 2) Im Internet finden sich zwei Anbieter:

1. Walzvital hat eine Teleskoprampe (http://www.walzvital.at/Teleskop-Rampe-939269.html?group=1585266)
2. Die AHA! Effekt- Technik Vertrieb GmbH bietet eine Rollrampe an (http://www.roll-a-ramp.de/)

Beide Rampen verwenden eine etwas unterschiedliche Technik – sie beiten deshalb auch unterschiedliche Vor- und Nachteile.

Ad 3) „Die DIN-Normen schreiben beispielsweise eine maximale Steigung von höchstens 6 % für Rollstuhlfahrerrampen vor. So ist zur Überwindung von zwei Treppenstufen in Höhe von 36 cm eine 6 Meter lange Rampe erforderlich.“ (http://de.wikipedia.org/wiki/Rollstuhlrampe - viel mehr Material für Aufgaben findet sich unter https://commons.wikimedia.org/wiki/ Category: Wheelchair_ ramps?uselang=de)

Mit diesen Informationen kann nun die weitere mathematische Arbeit beginnen. Wir schlagen - mit dem allgemeinen Lehrziel „Erziehung zur Mündigkeit" im Sinn - vor, die Schülerinnen und Schüler selbst mit der Planung der weiteren Arbeitsschritte zu betreuen. Wie soll es weiter gehen? Was würden Sie als nächstes tun? Wir schlagen vor, die vorhandenen Daten in eine Skizze einzutragen, etwa so:

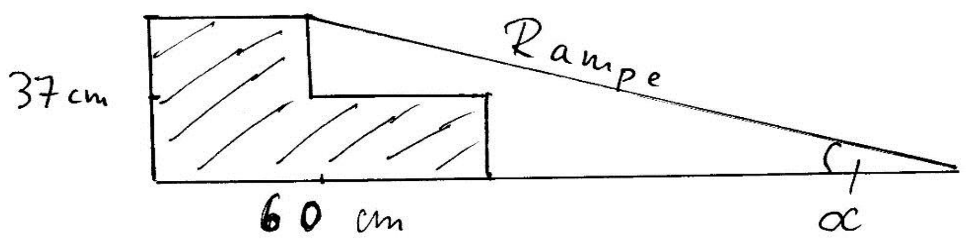


Abbildung 7: Skizze zur Rampe

Selbstverständlich lässt sich diese Skizze viel sauberer und genauer zeichnen, mit Millimeterpapier oder einer elektronischen Zeichenhilfe wird es viel schöner. Wir denken an das Prinzip der Verhältnismäßigkeit und fragen Sie, ob eine solche Skizze ausreicht. Sind alle wesentlichen Daten enthalten? Können wir beginnen zu rechnen?

Die Aufgabenstellung ist noch immer nicht so eindeutig identifizierbar wie in einer Schulbuchtextaufgabe. Wir schlagen vor, die die Schülerinnen und Schüler selbst herausfinden zu lassen, wie es weiter geht. Ein Weg könnte über die maximale Steigung der Rampe führen; der maximale Winkel α wird durch die maximale Steigung von 6% bestimmt. Mit dem Tangens (Definition im rechtwinkeligen Dreieck: Gegenkathete durch Ankathete) lässt sich nun der Winkel α berechnen.

Eine andere Überlegung führt etwas direkter und einfacher zum Ziel: Wenn 37 cm Höhe mit maximaler Steigung von 6% zu erreichen sind, werden pro Meter 6 cm Höhe erreicht. Demnach muss die Rampe länger als 6 Meter sein, damit Lars ohne fremde Hilfe hinauffahren kann. Das ist weit mehr als die von Walzvital angebotene Rampenlänge von etwas mehr als 2 Metern. Bei AHA! kostet eine Rampe der Länge 6,4 Meter 3.776,0 Euro plus Mehrwertsteuer – viel Geld für einen Schüleraustausch!

Wir schlagen deshalb vor, Lars zu begleiten, damit er eine Hilfe zum Fahren auf der Rampe bekommt. Dazu noch eine kleine Rechnung: Wie groß ist eigentlich die Steigung bei 2 Meter Rampenlänge? 37 cm Höhe auf 2 Meter Entfernung steigen, heißt 18,5% Steigung überwinden. Da freut sich ein Rollstuhlfahrer wohl tatsächlich über kräftige Hilfe!

Kommentar: Die Hauptaufgabe in diesem Beispiel ist es offenbar, sich die eigentliche Aufgabe deutlich zu machen. Danach ist die Rechnung einfach. Schon eine grobe Näherung ergibt, dass die Rampe mit 6% viel zu teuer wäre. Wenn wie hier aus der Praxis die Sinnfrage gestellt und mit Hilfe der Mathematik beantwortet werden kann, zeigen sich zugleich der Sinn und die Nützlichkeit des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts.

Welche Route nehmen wir?

Die Idee zum folgenden Beispiel verdanken wir Frau M. Spiegl und Herrn T. Lehner, die im Sommersemester 2014 eine Mathematikunterrichtseinheit für das Fachdidaktische Seminar in Linz vorbereitet haben.

Überblick: Wer einen Routenplaner oder ein Navigationsgerät nutzt, erhält oft mehrere Routen zur Auswahl vorgeschlagen. Mathematik hilft dabei, die optimale Route auszuwählen. Wenn nicht nur nach Fahrtzeit optimiert wird, sondern auch nach anderen Kriterien (auf dem Weg einkaufen, die Tante Anna besuchen, den Ausblick genießen, keine Maut zahlen,…) kann die Überlegung schnell komplex werden.

Frage: Wie würden Sie diese Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung:

Wir beginnen mit einem Text für einen Arbeitsauftrag an die Schulklasse: In diesem Schuljahr steht eine geografische Exkursion zum aufgelassenen Tagebau in Eisenerz auf dem Programm. Das Busunternehmen hat angefragt, auf welcher Route wir dorthin fahren wollen. Ein Routenplaner (z.B. Google Maps oder Open Street Map) bietet drei Möglichkeiten:

1. Die erste Route führt über die A1 und dann nach Süden. Beschreibt diese Route genauer!

2. Die zweite Route führt über die A9 und dann nach Osten. Beschreibt diese Route genauer!

3. Die dritte Route führt über Steyr nach Südosten. Beschreibt diese Route genauer!

Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die drei Routen vergleichen?

Wir schlagen vor, in der Klasse mit einer Sammelphase fortzufahren: Was ist den Schülerinnen und Schülern zu den drei Routen eingefallen bzw. beim Studium der Karte aufgefallen? Uns scheinen folgende Punkte wichtig.

- Route 1 (über die A1): Diese Route ist laut Google Maps 158 km lang. Ein PKW braucht 2 Stunden und 18 Minuten. Derzeit wird auf der Bundestraße 115 nördlich von Landl offenbar (Kennzeichnung in der Karte) gebaut, es gibt zumindest Verzögerungen. Wenn auf dieser Route gefahren werden soll, muss kurz vor Abfahrt noch einmal erkundet werden, wie der Stand bei den Bauarbeiten ist. Knapp die Hälfte der Route geht über die Autobahn, dann geht es weiter über die Bundesstraßen 121 und 115.

- Route 2 (über die A9): Diese Route ist laut Google Maps 164 km lang. Ein PKW braucht 2 Stunden und 2 Minuten. Der größte Teil geht über die Autobahn, dann kommt ein Stück Bundesstraße 146 im Ennstal und zum Schluss wieder einige Kilometer auf Bundesstraße

115. Auf dieser Route fallen extra Mautgebühren an (Bosrucktunnel) – wir müssen den Busunternehmer fragen, ob er eine Jahresmaut für Tunnel gezahlt hat und ob wir die Maut extra zahlen müssen.

- Route 3 (über Steyr): Diese Route ist laut Google Maps 144 km lang. Ein PKW braucht 2 Stunden und 5 Minuten. Nach einem kurzen Stück auf der Autobahn geht es hauptsächlich über die Bundesstraße 115 nach Süden.

Was nun? Reichen diese Informationen, um eine Entscheidung zu fällen? Was meinen Sie? Wir erinnern daran, dass im Alltag Entscheidungen über Fahrtrouten mit viel weniger Überlegung gefällt werden – wenn der Schaden bzw. der Unterscheid in Zeit und Kosten nicht sehr groß ist und keine zusätzlichen Argumente auftauchen, reichen diese Informationen. Wenn die Angaben aus dem Internet nicht einfach geglaubt werden, fällt vielleicht auf, dass es sich hier um PKW Fahrtzeiten handelt, die vielleicht nicht für einen Bus auf diesen Straßen zutreffen. In diesem Fall muss noch etwas Arbeit investiert werden.

Wir möchten an dieser Stelle aufmerksam machen, dass wir hier eine typische (Modellierungs-)Situation haben: Wir müssen entscheiden, ob wir Angaben glauben oder auf die Richtigkeit von Informationen aus dem Internet (aus der Werbung, von Firmen oder Behörden etc.) vertrauen oder nicht. Mathematik kann uns helfen, solche Informationen zu überprüfen bzw. auf Plausibilität zu testen. Dazu müssen wir allerdings Zeit und Mühe investieren. Wir halten es für ganz wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler in der Schule lernen, dass es solche Entscheidungssituationen immer wieder gibt. Wir möchten sie durch realitätsbezogenen Mathematikunterricht dazu befähigen, im Falle des nicht so großen Vertrauens in der Lage zu sein, Mathematik einzusetzen, um etwas zu überprüfen bzw. besser zu verstehen.

Wie können wir hier die Angaben von Google Maps überprüfen? Wir sehen folgende Möglichkeiten:

1. Anderes Navigationssystem verwenden
2. Straßenkarte nehmen und mit bewährter Methode (Stecknadeln, Bindfaden) die Länge der Strecken überprüfen (das ist eine gute

Methode, um das Rechnen mit dem Kartenmaßstab zu üben!)
3. Die Streckenlängen glauben, aber die Fahrtzeiten selbst berechnen.

Wir konzentrieren uns hier auf Möglichkeit 3. Dazu – so sollten die Schülerinnen und Schüler selbst befinden - brauchen sie Informationen über die durchschnittliche Geschwindigkeit, mit der ein Bus über die Autobahn oder eine Bundesstraße in der Ebene bzw. um Gebirge fährt. Sie können dazu beim Busunternehmen anrufen oder selbst schätzen.

Wir machen hier eine kleine Modellrechnung mit geschätzten Werten (oder solchen, die etwa von Automobilclubs für realistisch gehalten werden):

- durchschnittliche Geschwindigkeit auf der Autobahn: 80 km/h
- durchschnittliche Geschwindigkeit auf einer Bundesstraße in der Ebene: 60 km/h
- durchschnittliche Geschwindigkeit auf einer Bundesstraße im Gebirge: 40 km/h

Wir merken uns (wie bei allen eigenen Modellierungen), dass wir diese Annahmen in einem späteren Schritt anders treffen oder genauer recherchieren können, um nachzurechnen, wie sich Änderungen auf das Ergebnis (hier die Fahrzeit) auswirken. Je nach Modell kann es übrigens für den Mathematikunterricht sehr lehrreich sein, zu untersuchen, ob sich Änderungen in den Ausgangsgrößen und ihre Folgen für den zu berechnenden Wert als Funktion fassen lassen. Uns Mathematiker(innen) reizt dann auch die Frage, ob wir beweisen können, dass die gefundene Funktion tatsächlich die Änderungen richtig wider gibt.

Mit den gewählten Annahmen finden wir für Route 2 eine Strecke von 108 km auf der Autobahn, also etwas mehr als eine Stunde (wenn kein Stau ist und keine Schlange bei der Mautstelle, etwa weil der Bus die technischen Gegebenheiten zur Nutzung des Videomautsystems hat). Dann geht es ca. 58 km über die Ennstal - Bundesstraße (ca. eine Stunde) und schließlich noch einmal 18 km auf der B 115 durchs Gebirge (also fast 30 Minuten). Nach unserer Rechnung fährt demnach (wie zu erwarten) ein Bus etwas mehr zweieinhalb Stunden, d.h. etwas langsamer als ein PKW bei Google.

Haben Sie die Fahrtdauer genauer berechnet? Welche Genauigkeit ist denn in diesem Fall sinnvoll? Wir haben hier ganz bewusst recht ungenau gerechnet, weil wir ja nur überprüfen wollten, ob wir mit unseren Annahmen für durchschnittliche Reisegeschwindigkeiten eines Busses länger unterwegs sind als ein PKW nach den Parametern von Google.

Nach demselben Muster berechnen wir für Route 1 ca. zwei Stunden plus 50 Minuten und für Route 3 etwa drei Stunden und 25 Minuten. Wenn die Klasse nach Fahrzeit entscheidet, ist damit Route 2 klarer Favorit.

Offensichtlich hängt die Fahrtdauer von den Schätzungen bzw. Informationen über die durchschnittlichen Geschwindigkeiten ab. Wenn die Schulklasse dazu mehr wissen will, empfehlen wir, die unterschiedlichen Fahrtzeiten mit Hilfe einer Tabellenkalkulation auszurechnen.

Nun haben wir eine Tabellenkalkulation zu Hilfe genommen, um etwas genauer zu rechnen und vor allem, um die Möglichkeit zu haben, die Annahmen schnell zu ändern und gleich zu sehen, welche Fahrtzeiten dann berechnet werden.

Fahrzeiten: Linz - Erzberg

Annahmen für die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Busses

Autobahn	80	km/h		
Bundesstraße in der Ebene	60	km/h		
Bundesstraße im Gebirge	40	km/h		
Route 1 (über A1)			**Fahrzeit**	
Autobahn	61	km	45,75	Minuten
Bundesstraße in der Ebene	42	km	42,00	Minuten
Bundesstraße im Gebirge	55	km	82,50	Minuten
Strecke	158	km	170,25	Minuten
Route 2 (über A 9)				
Autobahn	108	km	81,00	Minuten
Bundesstraße in der Ebene	58	km	58,00	Minuten

Bundesstraße im Gebirge	18	km	27,00	Minuten
Strecke	184	km	166	Minuten

Route 3 (über Steyr)

Autobahn	24	km	18,00	Minuten
Bundesstraße in der Ebene	23	km	23,00	Minuten
Bundesstraße im Gebirge	97	km	145,50	Minuten
Strecke	144	km	186,50	Minuten

Hier die Werte für den ganz schnellen Bus (100/80/60) km/h:

Fahrzeiten: Linz - Erzberg

Annahmen für die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Busses

Autobahn	100	km/h
Bundesstraße in der Ebene	80	km/h
Bundesstraße im Gebirge	60	km/h

Route 1 (über A1)			**Fahrzeit**	
Autobahn	61	km	36,60	Minuten
Bundesstraße in der Ebene	42	km	31,50	Minuten
Bundesstraße im Gebirge	55	km	55,00	Minuten
Strecke	158	km	123,1	Minuten

Route 2 (über A 9)

Autobahn	108	km	64,80	Minuten
Bundesstraße in der Ebene	58	km	43,50	Minuten
Bundesstraße im Gebirge	18	km	18,00	Minuten
Strecke	184	km	126,3	Minuten

Route 3 (über Steyr)

Autobahn	24	km	14,40	Minuten
Bundesstraße in der Ebene	23	km	17,25	Minuten
Bundesstraße im Gebirge	97	km	97,00	Minuten
Strecke	144	km	128,65	Minuten

Damit sind wir übrigen auch recht nahe an den Google – Werten!

Für die Entscheidung dieser Schulklasse wird wohl die Frage zentral sein, ob es wegen der Maut auf der A 9 extra Kosten gibt.

Kommentar: Wir haben die Aufgabe in Oberösterreich lokalisiert, weil hier ein schönes Beispiel für drei fast gleichwertige Routen mit unterschiedlichen Vor- und Nachteilen existiert. Es kann für Ihre Schülerinnen und Schüler eine reizvolle Aufgabe sein, in der Nähe Ihrer Heimat eine Strecke mit mehreren fast gleichwertigen Routen zu finden.

Ohne Lokalisierung verliert die Aufgabe an Attraktivität. Das ist eine durchgehende Erfahrung mit realitätsbezogenen Aufgaben: Wenn die thematisierte Realität weit weg ist, wird sie weniger motivierend. Deshalb ist es oft die Aufgabe der Lehrkraft, die Idee eines realitätsbezogenen Unterrichtsvorschlages mit Daten aus der Nähe und insbesondere dem Umfeld von Schülerinnen und Schülern zu gestalten bzw. solche aktuellen und für sie relevanten Daten finden zu lassen.

Getränkeversorgung Elternabend/Schulfest

Die Idee zum folgenden Beispiel haben wir in verschiedenen Varianten (vgl. abschließender Kommentar) im Fachdidaktischen Seminar in Linz besprochen.

Überblick: Eine Schulklasse möchte für den anstehenden Elternabend Erfrischungsgetränke bereitstellen und bei der Gelegenheit ein wenig Geld für die Klassenkasse einnehmen. Dazu muss geplant und kalkuliert werden.

Frage: Wie würden Sie diese Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Zusammen mit der Ankündigung eines Elternabends erläutert die Lehrkraft die Idee, durch den Verkauf von Erfrischungsgetränken ein wenig Geld für die Klassenkasse zu verdienen. Die Lehrkraft ersucht in diesem Zusammenhang sowohl um Freiwillige, die bei der Vorbereitung und dem Verkauf mithelfen als auch um die Unterstützung bei einer gemeinsamen Planung: Welche Getränke sollen zu welchem Preis angeboten werden?

Ideen und Vorschläge werden gesammelt und geordnet; zum Ende bleiben die kalten und die warmen Erfrischungsgetränke über: Tee und Kaffee sowie Mineralwasser und Fruchtsaft. Nun werden parallele Arbeitsgruppen gebildet, die sich kalte oder warme Getränke aussuchen und dafür einen Vorschlag machen sollen. Die Fragen an alle Gruppen, die bei der Planung helfen, werden gemeinsam gesucht und formuliert, etwa so:

- Welche Menge wird insgesamt gebraucht?
- Wer kauft ein?
- Wie viele Wegwerfbecher und –tassen brauchen wir?
- Wie viel Geld wird das kosten?
- Verlangt die Schule Geld für das Wasser kochen? Strom: pauschal oder per kWh?
- Wenn alle Kosten bekannt sind – wie viel sollen die Getränke kosten?
- Was machen wir mit Getränken, die über bleiben?
- Sollen die Schülerinnen und Schüler bzw. die Lehrkraft auch etwas für Getränke zahlen?
- Sauber machen und Entsorgung: machen wir selbst!

Wenn Sie als Lehrkraft schon etwas Routine im Organisieren von Elternabenden haben, können Sie ohne Zweifel die Fragen leicht beantworten und die Punkte Einkauf und Preiskalkulation ohne langes Nachdenken effizient planen und notfalls auch allein durchführen. Auch wenn Sie den Schülerinnen und Schülern Ihre Erfahrungen mitteilen, um sie schneller und direkter zum Ziel führen, ist das wesentlich effizienter, als wenn Sie die Schülerinnen und Schüler zur Selbstorganisation anhalten und möglichst eigenverantwortlich planen und handeln lassen. Gerade hier liegt aber aus unserer Sicht die didaktische Herausforderung und Chance. Weshalb?

Im üblichen Mathematikunterricht haben errechnete Ergebnisse bzw. gelöste Aufgaben nur in einer Hinsicht Bedeutung: Stimmt die Lösung? Ob der fiktive Preis pro Becher Mineralwasser 1 Euro oder 10 Euro beträgt, ist für die Schülerinnen und Schüler viel weniger wichtig als die Frage, ob sie bei fiktiven Kosten von 50% des Verkaufspreises richtig ausrechnen, wie viel Geld bei einer bestimmten Anzahl verkaufter Becher Mineralwasser für Klassenkasse herauskommt. Hier aber geht es um reales Geld und eine reale Situation. Kein Schüler und keine Schülerin wird einen Preis von 10 Euro pro Becher Mineralwasser vorschlagen, die Einkaufkosten werden sicher nicht einfach mit 50% des Verkaufspreises geschätzt, niemand wird 100 Liter Mineralwasser auf Vorrat kaufen wollen. Vielleicht erleben Sie als Lehrkraft staunend wie vernünftig und realitätsbezogen die Schülerinnen und Schüler planen und entscheiden können, wenn sie merken, dass sie hier tatsächlich gefordert sind, selbst verantwortlich sind und letztlich selbst etwas davon haben, wenn sie gut kalkulieren.

Kommentar: Wir wollen Sie hier nicht damit langweilen, dass wir Ihnen vorrechnen, wieviel Gewinn pro Becher die Klasse macht, wenn ein Liter Mineralwasser für 30 Cent gekauft und für einen Euro verkauft wird. Für Kaffee ist die Kalkulation ein ganz klein wenig interessanter, wenn verglichen wird, wie viel eine Tasse kostet, die mit einem herkömmlichen Filter in einer alten Kaffeemaschine gekocht und eine Tasse, die in einer neuen Maschine aus einer Patrone gepresst wird.

Wie eingangs verspochen weisen wir darauf hin, dass ähnliche Kalkulationen auch für andere Arten von Verpflegung, z.B. selbst gebackenen Kuchen durchgeführt werden können. Wenn in der Schule die entsprechenden Einrichtungen (Lehrküche?) vorhanden sind, kann auch mit Proportionen für Rezepte gerechnet werden, wie viel Mehl, Eier etc. für 5 Kuchen gebraucht werden, wenn im Backbuch das Rezept für einen Kuchen steht.

Was passiert, wenn die Schülerinnen und Schüler falsche Entscheidungen treffen, wenn also etwa zu viel oder zu wenig Kaffee oder Mineralwasser vorhanden ist? Wenn die Schülerinnen und Schüler sich bei einer Aufgabe aus dem Schulbuch verrechnen, gibt es eine Korrektur, einen Tadel oder eine schlechte Note; hier gibt es vielleicht verärgerte Eltern oder weniger Gewinn als erhofft. Deshalb nehmen wir an, dass es hier eher zu erwarten ist, dass tatsächlich aus Fehlern gelernt wird. Zudem ist es in der Klasse ein spannender Prozess, wenn versucht wird herauszufinden, wer in welcher Weise für den Fehler oder die Fehlkalkulation verantwortlich ist.

Zimmer einrichten

Die Idee zum folgenden Beispiel haben wir in verschiedenen Varianten (s. abschließender Kommentar) im Fachdidaktischen Seminar in Linz besprochen.

Überblick: Ein Kind kann mit vorhandenen (oder neu zu kaufenden) Möbeln sein Zimmer einrichten. Vorgegeben sind der Grundriss des Zimmers und die vorhandenen Möbelstücke (oder ein Etat für den Einkauf); angestrebt ist eine funktionale und schöne Einrichtung.

Frage: Wie würden Sie diese Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Wir starten mit dem einfachen Fall (vorgegebene Möbel) und einem Grundriss für das Zimmer.

Liste der Möbelstücke, die verwendet werden können, aber nicht alle hineingestellt werden müssen:

Bett (1m breit, 2 m lang)
Nachttisch (60 cm breit, 60 cm tief)
Kleiderschrank (1,2 m breit, 50 cm tief)
Kommode (1,2 m breit, 40 cm tief)
Schreibtisch (1,6 m breit, 70 cm tief)
Tisch (80 cm mal 80 cm)
3 Stühle (60 cm mal 60 cm)
Blumenvase (rund, Durchmesser 50 cm)
1 Sessel (70 cm mal 70 cm)
1 Regal (1 m breit, 30 cm tief)

Arbeitsauftrag an die Schülerinnen und Schüler:

Gudrun darf selbst bestimmen, wie nach dem Umzug ihr neues Zimmer eingerichtet wird. Sie hat dazu eine Auswahl aus Möbeln, die sie verwenden kann. Auf jeden Fall sollen Bett, Kleiderschrank und

Schreibtisch im Zimmer sein. Bildet kleine Gruppen und erarbeitet einen Vorschlag für die Einrichtung. In der nächsten Stunde werden alle Vorschläge präsentiert und die Klasse darf den Vorschlag auswählen, der der Mehrheit am besten gefällt.

Noch ein Tipp: Zeichnet für jeden Einrichtungsgegenstand die Grundfläche auf ein extra Papier. Überlegt euch damit, wie die einzelnen Einrichtungsgegenstände so aufgestellt werden können, dass das Zimmer schön aussieht und gut zu benutzen ist!

Zusatzaufgabe: *Zeichnet das Zimmer so, wie es von der Tür oder dem Fenster aus gesehen wird, wenn es nach euren Vorstellungen eingerichtet wird.*

Kommentar: Weil einerseits mehr Einrichtungsgegenstände zur Verfügung stehen, als sinnvoller Weise ins Zimmer passen, und andererseits das Zimmer so groß ist, dass nicht nur genau eine Lösung sinnvoll und funktional scheint, wird die Auswahl der tatsächlich gewählten Einrichtung zweistufig erfolgen. Zunächst gibt es einen Test auf Funktionalität (können die Türen vom Kleiderschrank, die Zimmertür und die Fensterflügel geöffnet werden? Stolpert Gudrun auf dem Weg ins Bett über einen Sessel? Etc.) und dann wird es schwierig, weil die verbleibenden Entwürfe im Hinblick auf ihre ästhetische Qualität verglichen werden. Beim Nachdenken über Funktionalität kann die Lehrkraft noch etwas helfen, die Entscheidung über Ästhetik sollte weitgehend den Schülerinnen und Schülern überlassen bleiben.

Ganz offensichtlich kann diese Aufgabe komplexer und offener gestaltet werden, wenn der Raum größer ist und mehr Einrichtungsanforderungen gestellt und mehr Varianten möglich sind. Dazu kann etwa ein L-förmiger Grundriss, ein Erker oder ein Ofen im Zimmer beitragen, aber auch der Sprung zur Einrichtung eines ganzen Appartements ist denkbar. Ebenso kann ein Basar in der Aula der Schule oder ein Verkehrsübungsplatz fürs Radfahren auf dem Schulhof geplant werden.

Mäuse im Getreidespeicher

Die Idee zum folgenden Beispiel haben wir von Kollegen G. Ossimitz übernommen, die aus vielen Diskussionen über Systemdynamik (vgl. Ossimitz 2000) stammt, die mit ihm stattgefunden haben.

Überblick: Mäuse in einem Getreidespeicher sind ein schönes Beispiel für ein dynamisches System, an dem Modellieren geübt und etwas über dynamische ökologische System gelernt werden kann. Zunächst vermehren sich die Mäuse exponentiell. Dann geht das Wachstum nicht – wie Sie vielleicht vermuten würden – in ein logistisches Wachstum über, sondern es mündet in einer Katastrophe. Die Mäuse erleben eine zu hohe Anzahl im selben Raum (eben dem Getreidespeicher) als so bedrohlich, dass sie sich nicht mehr fortpflanzen und sich gegenseitig töten. Erst wenn die Anzahl dramatisch gesunken ist, verhalten sie sich wieder normal und vermehren sich auch wieder.

Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Wir setzen die biologische Information in eine kleine Geschichte um. Damit erhalten wir folgendes Arbeitsblatt:

Bauer Max Huber erzählt über den ärgerlichen Verlust von Getreide durch Mäuse. Ab und zu hat er scheinbar gar keine Mäuse im Getreidespeicher, ab und zu ganz viele Mäuse und manchmal wundert er sich über viele tote Mäuse. Wenn er sich besonders ärgert, kauft er Gift, das aber nie alle Mäuse tötet, sondern maximal etwa 50. Zum Schluss fragt er: Gibt es einen optimalen Zeitpunkt für den Einsatz von Gift?

Seine Schwester ist Biologielehrerin. Sie erinnert sich vage, dass Mäuse sich um etwa 10 Prozent monatlich vermehren, wenn sie genug Nahrung und Freiraum haben. Zudem weiß sie, weshalb es ab und zu ganz viele tote Mäuse gibt: Die Mäuse erleben eine zu hohe Anzahl im selben Raum (eben dem Getreidespeicher) als so bedrohlich, dass sie sich nicht mehr fortpflanzen und sich gegenseitig töten. Erst wenn die Anzahl auf etwa 5 Prozent gesunken ist, verhalten sie sich wieder normal und *vermehren sich auch wieder.*

Aufgabe: Erstellen Sie ein mathematisches Modell, das die Anzahl der Mäuse beschreibt. Nehmen Sie als Ausgangswert fürs erste Modell 100 Mäuse und als Wert für das Einsetzen der Katastrophe den 10fachen Wert des Ausgangswertes. Können Sie aus dem Modell ablesen, wann der Bauer sein Gift streuen soll?

Zwischenfrage: Denken Sie hier an ein System von Differentialgleichungen? Dann sind Sie vielleicht geneigt zu denken „Viel zu schwer!“ In diesem Fall haben wir eine Überraschung für Sie: Es geht schon in der Sek I – mit einer Tabellenkalkulation.

Wir tragen die gegebenen Informationen zusammen und erstellen ein Modell in einer Tabellenkalkulation.

Startzahl: 100 Mäuse
Normales Wachstum: 10% Vermehrung pro Monat
Kritische Grenze: Das 10fache der Startzahl
Anzahl nach der Krise: 5% der Anzahl vor der Krise
Einmal Gift tötet maximal 50 Mäuse

Wir haben eine Tabelle erstellt:

Monat	Anzahl
0	100,00
1	110,00
2	121,00

…

Nach 25 Monaten sind es mehr als 1000 Mäuse. Deshalb haben wir an dieser Stelle die 5% ausrechnen lassen:

25	1083,47
26	54,17
27	59,59

Dann geht es mit 10prozentigem Wachstum weiter, bis wieder mehr als 1000 Mäuse erreicht sind:

56	945,30
57	1039,83
58	51,99
59	57,19

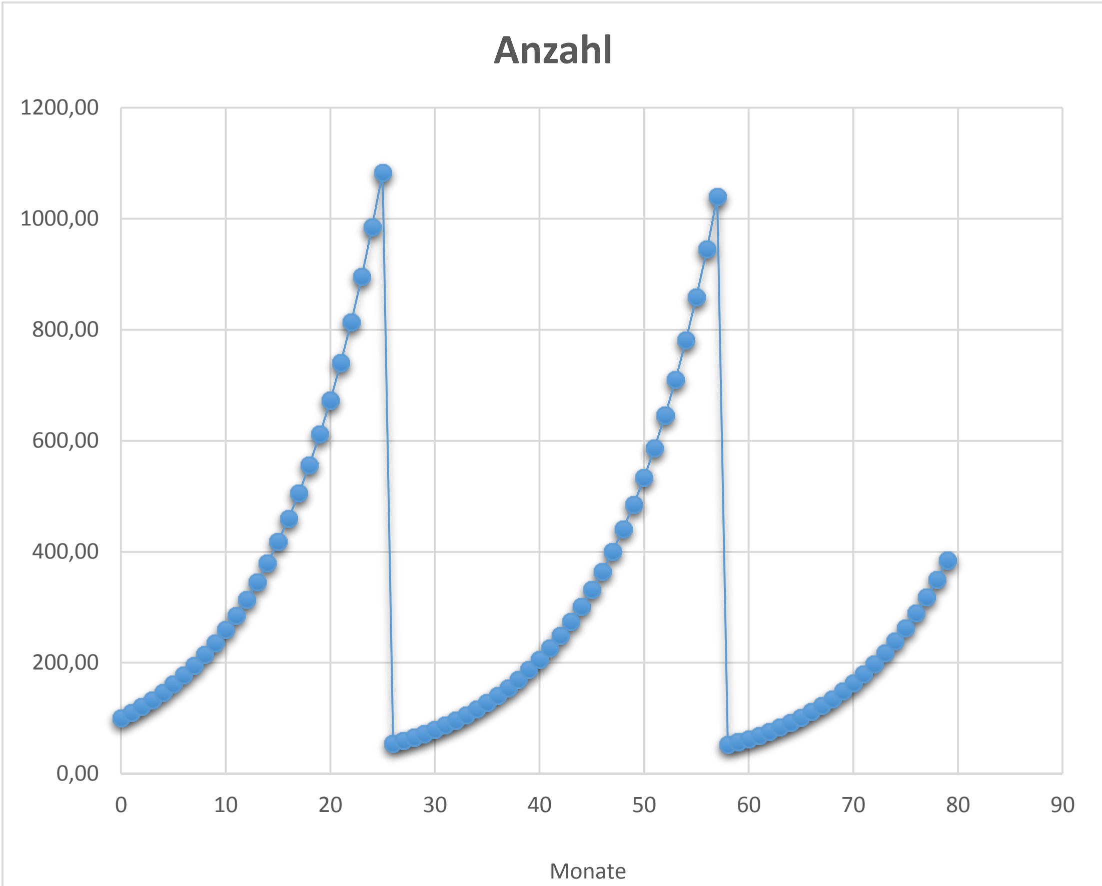


Abbildung 8: Mäusepopulation

Damit ist grafisch dargestellt, wie viele Mäuse sich in etwa zu einem bestimmten Zeitpunkt im Getreidespeicher befinden. Selbstverständlich ist es sinnvoll, diese Grafik genauer anzuschauen und zu interpretieren.

Was fällt Ihnen auf?

Wir weisen zunächst auf den periodischen Charakter der Anzahl hin. Immer dann, wenn der Wert die Zahl 1000 überschreitet, rafft die Krise 95% der Mäuse dahin. Dann beginnt wieder exponentielles Wachstum.

Damit stellt die Grafik dar, was eingangs verbal beschrieben wurde.

Wichtig scheint uns, an dieser Stelle in der Schulklasse auf Genauigkeitsfragen einzugehen. Mit dem Verzicht auf die Werkzeuge der Analysis verzichten wir auf die Möglichkeit, die Mäuseanzahl für einen beliebigen Zeitpunkt mit beliebiger Genauigkeit angeben zu können. Der Verzicht bedrückt uns aber nicht, weil wir ohnehin nur in etwa wissen, wie viele Mäuse zu einem bestimmten Zeitpunkt leben. Wenn wir nach Unterschieden in der Anzahl bei Zeitabständen von einer Sekunde oder weniger fragen, kommen irgendwelche Bruchteile von Mäusen heraus. Um die gesuchte Antwort nach dem optimalen Gifteinsatz zu finden, reichen die monatlichen Zeitintervalle aus. Glauben Sie (bzw. Ihre Schülerinnen und Schüler) das nicht? Dann machen Sie doch einfach folgendes Experiment in der Tabelle:

Ziehen Sie zu einem beliebigen Zeitpunkt die vergifteten Mäuse ab. Wie ändert sich die Grafik?

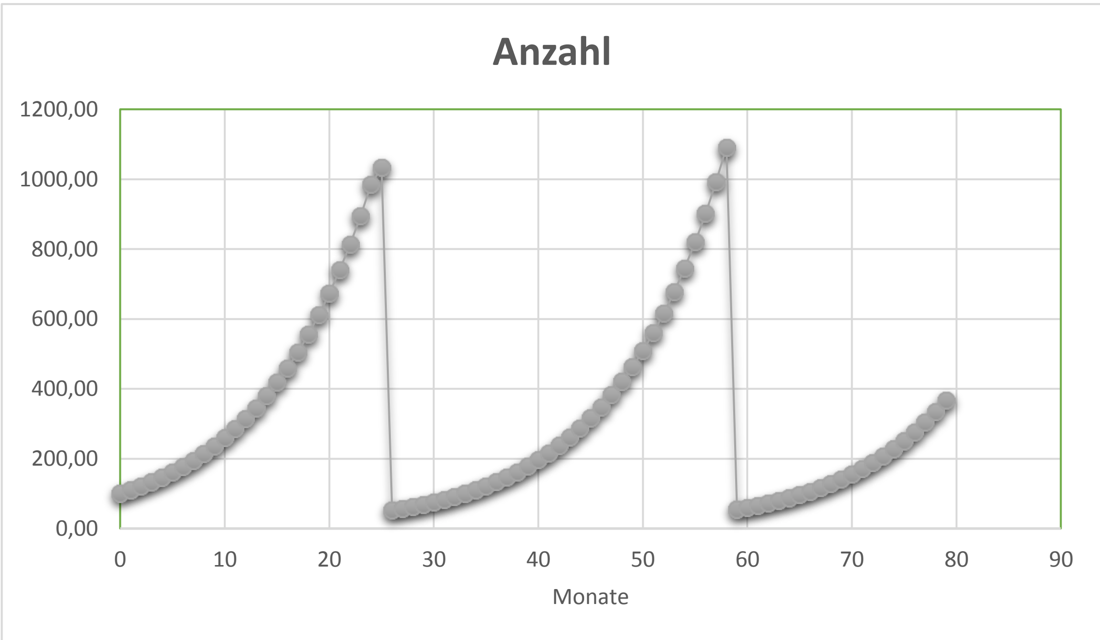


Abbildung 9: Mäusepopulation mit Gift (1)

Hier haben wir Gift gleich am ersten Tag gestreut. Bis zur ersten Krise dauert es 7 Monate länger.

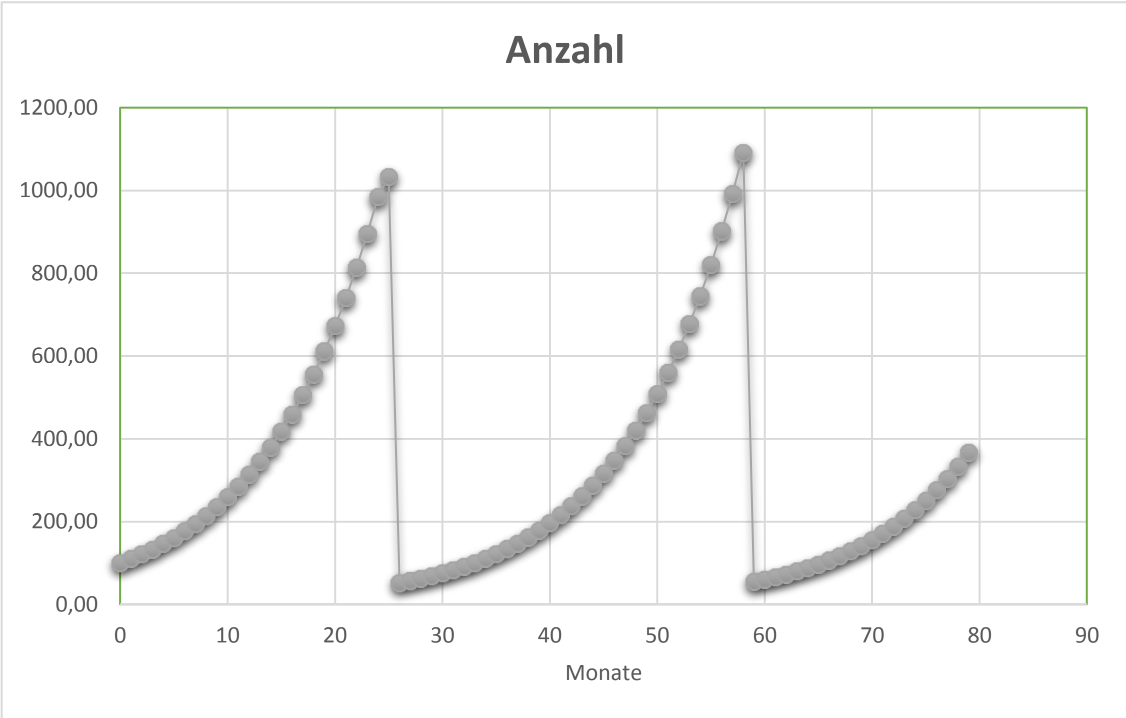


Abbildung 10: Mäusepopulation mit Gift (2)

Hier haben am 15. Tag Gift gestreut. Bis zur ersten Krise dauert es einen Monat länger.

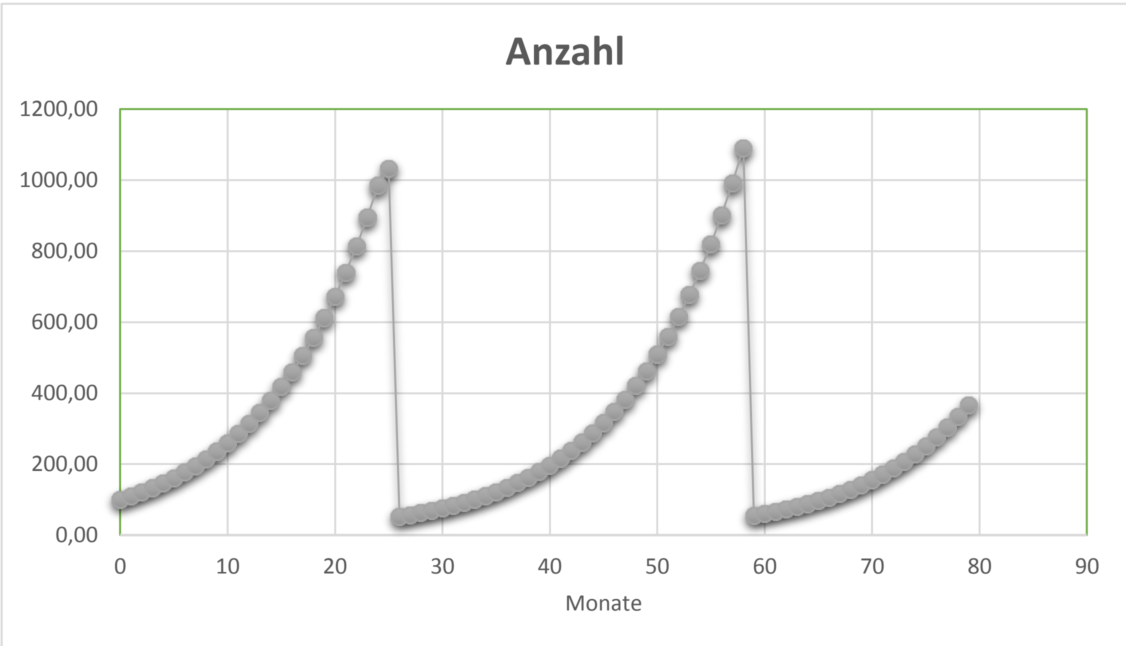


Abbildung 11: Mäusepopulation mit Gift (3)

Im dritten Fall haben wir am 25. Tag Gift gestreut – es hat fast keine Auswirkungen, weil ohnehin bald danach das Massensterben einsetzt.

Fassen wir das Ergebnis zusammen, so raten wir dem Bauern, dann Gift zu streuen, wenn er ganz viele tote Mäuse sieht. Da das Gift nicht mit Garantie genau 50 Mäuse tötet und Mäuse von außen zuwandern können, kann er jedoch nie hoffen, einen Getreidespeicher ohne Mäuse zu haben.

Kommentar: Ganz offensichtlich ist das Beispiel ausbaufähig. Ein nahe liegender Schritt ist die Variation der konkreten Ausgangswerte. Wer etwa mit 60 Mäusen, 8% Wachstumsrate und 500% der Ausgangszahl als kritischer Grenze rechnet, wird zur selben Interpretation kommen.

Mathematisch etwas interessanter ist die Einführung von Katzen ins Modell. Was passiert, wenn die vielen Mäuse zu einer vermehrten Anzahl von Katzen, wobei – als erste Modellannahme – jede Katze jeden Tag eine Maus frisst und wohlgenährte Katzen sich um (sagen wir) 3% monatlich vermehren? Mit den Katzen ist das Tor zu Räuber – Beute – Modellen geöffnet. Wir folgen auch hier den Vorschlägen von G. Ossimitz wenn wir Ihnen raten, bei der Thematisierung auf Differentialgleichungen zu verzichten und mit Tabellenkalkulation und fixen Zeitabständen zu arbeiten.

Robotersteuerung

Die Idee zum folgenden Beispiel haben wir im Rahmen des Projekts „Power Girls“ entwickelt
(http://www.edugroup.at/praxis/portale/powergirls/projekt.html).

Überblick: Ein Roboter, gespielt von einer Schülerin oder einem Schüler, soll mithilfe eines vorher überlegten Programms möglichst genau zu einem Ziel im Klassenraum oder in der Schule gesteuert werden. Dazu braucht eine Befehlssprache (besonders gut mit Koordinaten). Der Kern des Problems ist die Genauigkeit: Wie lässt sich die Schrittweite so messen und normieren, dass der Roboter tatsächlich genau am Ziel ankommt? Die exakte Robotersteuerung ist ein übrigens ein in der Realität sehr wichtiges Problem, dass bei jedem Industrieroboter (bekanntester Einsatzbereich ist hier wohl der Rasenmäher- bzw. Staubsaugerroboter) auftritt und gelöst werden muss. (vgl.: https://prof.beuthhochschule.de/fileadmin/user/linnemann/PDF-Dateien/Robotertechnik/Roboter_Technik_Vorlesung_Teil_04.pdf)

Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: In diesem Beispiel haben wir unseren Vorschlag methodisch etwas genauer formuliert, damit deutlich wird, wie unserer Einschätzung nach die zwei verschiedenen Lehrziele (Koordinaten, Genauigkeit) erreicht werden können.

Als Einstieg eignet sich vielleicht ein Video am besten, in dem zu sehen ist, wie ein Roboter gesteuert wird, z.B.: http://video.golem.de/games/12623/dfki-roboter-angesehen.html. Daran wird die Frage geknüpft, wie ein Roboter gesteuert wird. Irgendwie muss ihm mitgeteilt werden, welches Ziel er wie erreichen soll, wenn er von Punkt A nach Punkt B gelangen soll. Ein durchgängiges Problem bei allen Roboterbewegungen ist die exakte Steuerung: Schweißpunkte müssen an der richtigen Stelle gesetzt werden, Teile zum Montieren an die richtige Stelle bewegt werden, damit sie geschweißt oder angeschraubt werden können, Farbe muss an die richtige Stelle, Autozubehör ebenfalls etc. Um eine einfache Steuerung zu simulieren, spielt jeweils eine Schülerin oder ein Schüler einen Roboter.

Die Lehrkraft lädt dazu ein, sich zunächst an der Tafel gemeinsam ein kleines Beispiel für die Problematik anzuschauen. Ein sehr einfacher Roboter kann sich nur in zwei Richtungen bewegen, vorwärts und rückwärts oder rechts und links (jeweils parallel zu einer Kante der Tafel, nicht einfach „schräg“ und direkt von Punkt zu Punkt auf der Tafel).

Wenn wir nun wollen, dass der Roboter sich an der Tafel von einem Punkt zu einem anderen bewegt, müssen wir ihm genau sagen, was er tun soll. Dazu wird zunächst die Lage des Ausgangspunktes bestimmt. Eine gute Möglichkeit dazu sind Koordinaten. Wenn wir ein Koordinatensystem so anlegen, dass der Ausgangspunkt im Ursprung liegt, können wir leicht nachmessen, dass der Zielpunkt z.B. im Punkt (30, 50) liegt. Damit können wir direkt die Wegbeschreibung (Anweisung) für den Roboter formulieren: „Bewege dich um 30 Einheiten (hier ist die Einheit cm) nach rechts und um 50 nach oben!" (oder erst nach oben und dann nach rechts).

Wenn wir ohne Koordinaten arbeiten wollen, suchen wir jenen Punkt, der Schnittpunkt von den Parallelen zu den Tafelkanten durch Ausgangs- und Zielpunkt ist. Dann messen wir die Strecken vom Ausgangs- bzw. Zielpunkt zum Schnittpunkt und erhalten die Daten für die Befehle an den Roboter.

Nun folgt noch eine kleine Vorbereitung zum Üben. Die Lehrkraft stellt eine etwas schwierigere Aufgabe für alle. „Der Roboter soll sich vom Punkt (0, 0) zum Punkt (4, 9) bewegen. Allerdings liegt ihm dabei ein rechteckiger Gegenstand im Weg, dessen Ecken sich auf den Punkten (0, 2), (5, 2), (0, 3) und (5, 3) befinden. Welche Anweisungen gebt Ihr dem Roboter, der nur ganze Schritte gehen kann?“

Eine mögliche Lösung ist:
1. Bewege dich nach rechts zum Punkt (6, 0)
2. Bewege dich nach oben zum Punkt (6, 9)
3. Bewege dich nach links zum Punkt (4, 9)

Das Problem der Genauigkeit ist bisher bewusst nicht thematisiert worden. Auf dem Kästchenpapier im Heft ist der Umgang mit dem Koordinatenkreuz ebenso unproblematisch wie auf der Tafel. Die Schülerinnen und Schüler sollen dieses Problem selbst erkennen, indem sie in spielerischer Form einen Roboter steuern.

Nun beginnt die Simulation. Die Schülerinnen und Schüler sollen in Gruppen selbst Anweisungen zur Robotersteuerung erstellen. Die Lehrkraft erläutert die „Spielregeln": Je ein Mitglied aus einer Gruppe spielt den Roboter, der sich strikt an die vorgegebenen Befehle halten muss. Wie auf dem Papier bzw. an der Tafel kann der Roboter im Klassenraum sich nur in zwei Richtungen bewegen, vorwärts und rückwärts oder rechts und links (jeweils parallel zu einer Wand - ein rechtwinkliges Klassenzimmer wird vorausgesetzt, gegebenenfalls durch begrenzende Tische oder Linien erzeugt).

Ganz wichtig ist die folgende Spielregel: Der Roboter kann keine Entfernungen messen, sondern nur zählen, z.B. Schritte.

Weitere Regel: Jede Schrittfolge eines Roboters muss damit beginnen, dass er sich passend ausrichtet, also so, dass die ausgestreckten Arme parallel zu einer Wand und senkrecht zur anderen sind. Während der Schrittfolge darf (und kann) der Roboter sich nicht drehen!

Erste Testaufgabe an alle: Ein Roboter soll von einem Fenster zur gegenüberliegenden Wand gehen.

Die Schülerinnen und Schüler jeder Gruppe erstellen dazu die Bewegungsanweisung für ihren Roboter, etwa: gehe 15 Schritte geradeaus! Die Lehrkraft geht in dieser Phase von Gruppe zu Gruppe, achtet auf die Zusammenarbeit in den Gruppen (alle sollen mitarbeiten) und berät auf Anfrage.

Der Reihe nach bewegen sich die Roboter strikt nach Anweisung. In der Nähe der gegenüberliegenden Wand wird markiert, wie genau die Roboter der einzelnen Gruppen ihr Ziel erreicht haben. Die Abstände werden gemessen.

Nun folgt ein gemeinsames Nachdenken und eine Diskussion: Wie groß sind die Fehler? Weshalb sind überhaupt Fehler entstanden? Hat die als Roboter ausgewählte Schülerin (bzw. der Schüler) die Anweisungen schlecht befolgt? Macht es eine andere Person besser? Gibt es auch dann ein (Genauigkeits-) Problem, wenn eine andere Schülerin (oder ein anderer Schüler) den Roboter spielt und dieselben Anweisungen erhält?

Nun folgt zur Abwechslung ein Wettbewerb: Mehrere Gruppen von Schülerinnen und Schülern sollen für dieselbe Strecke Anweisungen ausarbeiten. Je nach noch zur Verfügung stehender Zeit und Einschätzung der Lehrkraft kann die Strecke mehr oder weniger lang und schwierig sein: von einem Platz bis zur Tür, um einen Tisch herum, der Hin- und Rückweg kann verschieden sein...

Wie beim Probelauf werden die Roboter auf die Reise geschickt und die Abweichungen vom Ziel werden gemessen und verglichen. Die Gruppe, die gewonnen hat, erläutert den anderen Gruppen ihre Strategie. Wie haben sie den Fehler minimiert?

Falls bis hier hin die Schülerinnen und Schüler nicht selbst auf die Idee gekommen sind, die Bewegung möglichst exakt zu normieren (also z.B. Schuhlängen statt Schritt als Einheit zu wählen), sollte die Lehrkraft zum Abschluss noch auf diesen Punkt hinweisen. Bei Bedarf kann auch eine Verbindung zur Geschichte hergestellt werden: Der Schritt von Maßeinheiten wie Elle oder Fuß zum Pariser Normmeter war und ist bedeutend.

Kommentar: Die unterschiedlichen Körpergrößen und Schrittlängen der Schülerinnen und Schülern zeigen durch das eigene Erleben die Schwierigkeit auf, exakte Anweisungen zu geben und führen zum Problem der Normierung von Längen. Die Schülerinnen und Schüler als ferngesteuerte Roboter fügen der Einheit ein spielerisches motivierendes Element hinzu.

Goldener Schnitt

Über den Goldenen Schnitt und verschiedene Möglichkeiten, ihn im Mathematikunterricht zu thematisieren, ist in der Mathematikdidaktik immer wieder nachgedacht worden (vgl. z.B. Henning, http://www.math.uni-magdeburg.de/reports/2003/pre_gold_schnitt.pdf).

Überblick:
Wir schlagen hier dazu einen kleinen Wettbewerb vor, um auf die Vielzahl der Möglichkeiten hinzuweisen, die in der didaktischen Literatur beschrieben werden.

Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Wir gehen davon aus, dass der Goldene Schnitt bereits behandelt wurde und starten einen Wettbewerb: Welche Gruppe findet die meisten Beispiel für den Goldenen Schnitt auf einem Foto des Rathauses von Leipzig? Ein Bild finden Sie z.B. unter http://www.sachsen-virtuell.de/leipzig-stadtjubilaeum. htm. Der Turm steht offenbar nicht in der Mitte… Jedes gefundene Beispiel muss genau gekennzeichnet und nachgerechnet werden!

Nach der Aufwärmrunde wird es ernst. Die Gruppen erhalten die Aufgabe, ein beliebiges Foto oder Bild zu suchen, darin für sich selbst die Beispiele für den Goldenen Schnitt zu finden und dann das Bild an eine andere Gruppe weiter zu geben (am einfachsten im Kreis). Diese Gruppe bekommt einen Punkt, wenn sie mindesten so viele Beispiele gefunden hat wie die Gruppe, von der sie das Bild oder Foto erhalten hat. Je nach Zeit werden einige Runden gespielt, bevor die Punkte addiert werden.

Kommentar: Solch ein Vorschlag eignet sich auch für eine Vertretungsstunde in einer fremden Klasse. In Kooperation mit dem Kunstunterricht kann das auch der Ausgangspunkt für eine genauere Beschäftigung mit Werken von z.B. Albrecht Dürer sein (http://www.kunstkopie.at/a/albrecht-duerer.html).

Die Stichworte Wettbewerb und Vertretungsstunde bewegen uns dazu, an dieser Stelle noch einen Tipp für eine Unterrichtseinheit zu geben, die nicht realitätsbezogen ist. Es geht um ein **Würfelturnier**, das die Fähigkeit zum Kopfrechnen trainiert und – falls das von Ihnen gewünscht wird, um die entsprechenden Kompetenzen zu fördern – auch organisiert und ausgewertet wird. Wir beschreiben den Unterrichtsvorschlag inklusive unserer Vorschläge für die Methodik.

Einleitend erläutert die Lehrkraft ein Würfelspiel, das ein wenig an das Kartenspiel 17 + 4 erinnert. Zunächst wird mit drei Würfeln gewürfelt, z.B. 2, 6, 6. Diese drei Zahlen sollen nun mit Addition und Multiplikation (in der schwierigeren und spannenderen Version auch mit Subtraktion und Division) so verknüpft werden, dass die Spielerin bzw. der Spieler eine Zahl erhält, die möglichst nahe an 21 oder gleich 21 ist, aber auf keinen Fall größer. 2 + 6 + 6 = 14 (naja), 2 * 6 + 6 = 18 (ist schon besser). Die Spielerin bzw. der Spieler hat maximal 30 Sekunden (oder 20 Sekunden oder 1 Minute, wenn es beschaulicher gehen soll. Wenn die Schülerinnen und Schüler ohne formale Beschränkung der Bedenkzeit schnell spielen, geht es einfacher) Zeit, die Würfelaugen zu verknüpfen. Dann muss sie bzw. er sich entscheiden: Bin ich damit zufrieden? Oder nehme ich noch einen weiteren Würfel hinzu? Der vierte Würfel zeigt eine 4. 18 + 4 = 22 ist zu viel. Also versucht die Spielerin bzw. der Spieler etwas anderes, etwa 2 + 6 + 6 + 4 = 18.

Wenn die Subtraktion zugelassen wird, geht auch 6 * 4 – 6 + 2 = 20. Noch einmal darf sich die Spielerin bzw. der Spieler entscheiden: Bin ich damit zufrieden? Oder nehme ich noch einen weiteren Würfel hinzu? Maximal fünf Würfel können verwendet werden.

Im Beispiel ist der fünfte Wurf eine 3: Volltreffer! 2 + 6 + 6 + 4 +3 = 21. Besser geht es nicht.

Wenn Subtraktion und Division zugelassen sind, geht auch (6 : 2) * (6 + 4 – 3) = 21.

Nun darf die Gegenspielerin bzw. der Gegenspieler würfeln: Wenn sie bzw. er weniger erreicht, hat sie bzw. er verloren, beim gleichen Wert ist es unentschieden. Für einen Sieg gibt es zwei Punkte (oder drei, wie beim Fußball), für ein Unentschieden einen Punkt und wer verliert, erhält keinen Punkt. Nach drei Runden ist das Duell vorbei. Je nach Regelvereinbarung kann es z.B. 6 : 3 (für 2 : 1 Siege) oder 3 : 3 (alle drei Runden endeten unentschieden) enden.

Die Schülerinnen und Schüler machen einige Probespiele als Training. Die Lehrkraft kündigt nun an, dass ein Turnier stattfinden soll. Wer kann das Spiel am besten?

Bevor es losgehen kann, muss allerdings entschieden werden, wie die beste Spielerin bzw. der beste Spieler ermittelt werden soll. Die Schülerinnen und Schüler werden um Rat gebeten. Zwei Vorschläge liegen nahe, weil die der Erfahrung aus dem Sport im Fernsehen oder dem Sportverein entsprechen, ein K.-O.-System wie im Tennis oder ein Rundensystem (jede gegen jede, eventuell sogar mit Hin- und Rückrunde) wie im Fußball oder Handball, vielleicht noch mit einem „Play - Off" (best of five) wie im Eishockey. Vielleicht gibt es noch einen dritten Vorschlag mit Vorrunde und Hauptrunde.

Wenn möglich sollen alle Vorschläge realisiert werden. Zunächst sollen die Schülerinnen und Schüler für jede Form den Wettkampf organisieren, also einen Turnierplan erstellen. Wer spielt in der ersten, zweiten etc. Runde gegen wen? Je zwei Spielerinnen bzw. Spieler brauchen eine Schiedsrichterin bzw. einen Schiedsrichter, alle zusammen brauchen zwei oder drei Schülerinnen oder Schüler als Turnierleitung. Die Leitung muss auch die Ergebnisse notieren und von Runde zu Runde eine Tabelle erstellen.

Selbstverständlich kann die Lehrkraft all diese Aufgaben mit der nötigen Autorität und Erfahrung effizienter als die Schülerinnen und Schüler bewältigen. Aber die Schülerinnen und Schüler sollen ja gerade lernen, sich selbst zu organisieren. Die Lehrkraft weist also nur auf eventuelle Planungsfehler hin bzw. fragt: Wie soll bestimmt werden, wer nach einigen Runden führt? (Falls rundenweise gespielt werden soll).

Je nach Entscheidung der Schülerinnen und Schüler bzw. Zeitlimits der Lehrkraft werden 2 oder 3 Wettkämpfe durchgeführt. Rückblickend werden Vor- und Nachteile der Turnierorganisation besprochen, etwa:

* K.O. System geht schneller (viel weniger Spiele – wie viele?)

* Beim K.O. System müssen viele zuschauen (dürfen nicht mehr mitspielen, brauchen nicht rechnen – je nach Perspektive)

* Rundensystem ist sehr aufwendig, aber alle sind immer intensiv beschäftigt

* Rundensystem mit Vorrunde und Trostrunde geht schneller, aber dennoch sind alle beschäftigt.

Beschreibende Statistik: Firmenbilanz positiv/negativ darstellen

Das folgende Beispiel stammt aus einer unserer Lehrveranstaltungen.

Überblick:

Eine gute Übung zur beschreibenden Statistik ist, Fehler oder bewusste Verzerrungen in veröffentlichten Darstellungen zu suchen. Dazu schlagen wir auch Beispiele vor. Hier geht es um eine Umkehrung: Wie manipulieren wir selbst vorgegebene Daten, um sie im Sinne unserer Absicht darzustellen? Wir erwarten uns von dieser Umkehrung einen besonders nachhaltigen Lerneffekt.

Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Wir geben eine kleine Firmenbilanz vor und informieren die Schülerinnen und Schüler, dass diese Firma zum Verkauf steht. Der Wert der Firma hängt stark davon ab, wie viel Gewinn sie in den letzten Jahren gemacht hat. Deshalb versucht die Firma sich selbst möglichst positiv darzustellen, während potentielle Käufer die Daten eher negativ darstellen wollen.

Hier ist eine Tabelle der Gewinne in den letzten 10 Jahren:

Jahr	Gewinn in Millionen Euro
2004	198
2005	172
2006	145
2007	132
2008	58
2009	122
2010	145
2011	174
2012	175
2013	176

Eine schlichte Grafik, ein Balkendiagramm veranschaulicht diese Werte so:

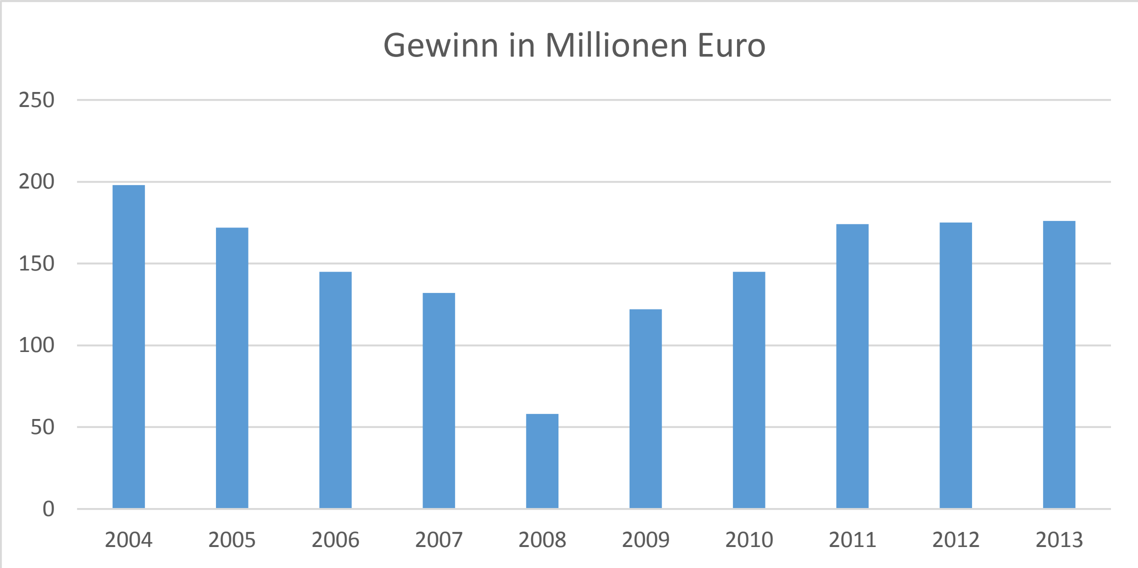


Abbildung 12: Balkendiagramm zum Firmengewinn (1)

Nun wird die Klasse in zwei Hälften geteilt; die Schülerinnen und Schüler der Firma sollen die Zahlen möglichst positiv darstellen, die der Käufer möglichst negativ.

Im Zuge der Präsentation der verschiedenen Vorschläge ist es die Aufgabe der jeweils anderen Gruppe, die Tricks der Gegenseite aufzudecken.

Hier einige Beispiele für positive Darstellungen:

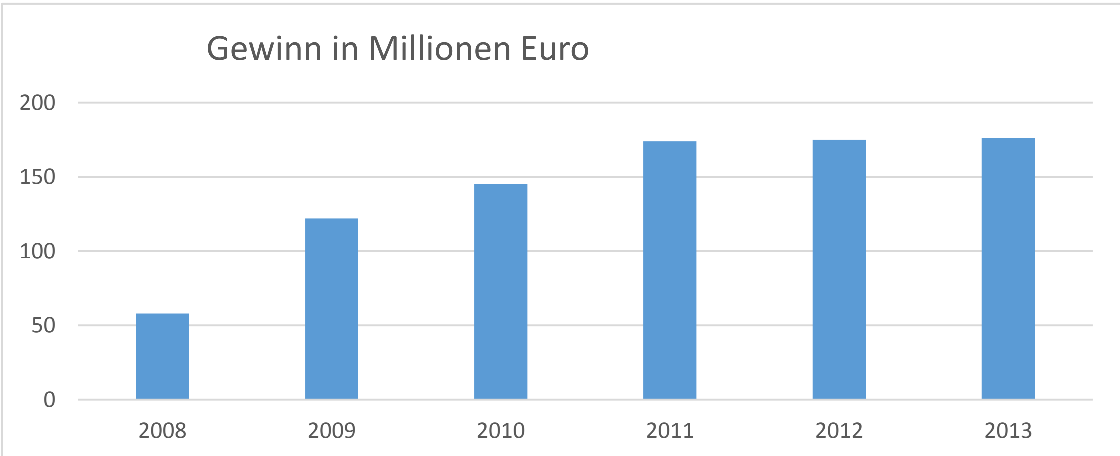


Abbildung 13: Balkendiagramm zum Firmengewinn (2)

Die Zeiten sinkender Gewinne vor dem Jahr 2008 werden einfach nicht dargestellt.

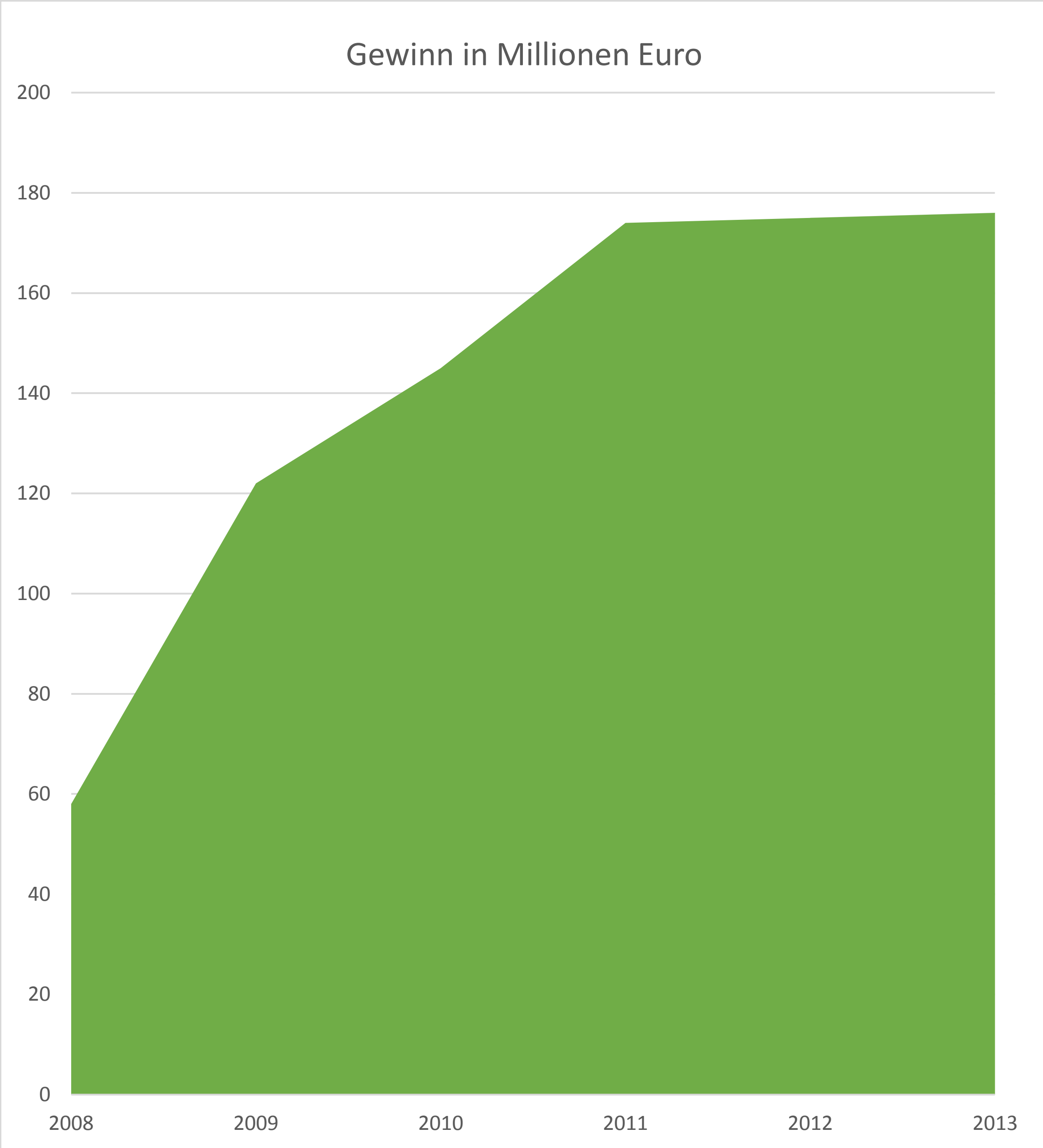


Abbildung 14: Diagramm zum Firmengewinn (2)

Die Fläche wirkt eindrucksvoller als die einzelnen Balken. Noch zwei Tricks: Wir haben die Summe der Gewinne berechnet und dargestellt. In der Darstellung haben wir bewusst die y-Achse gedehnt.

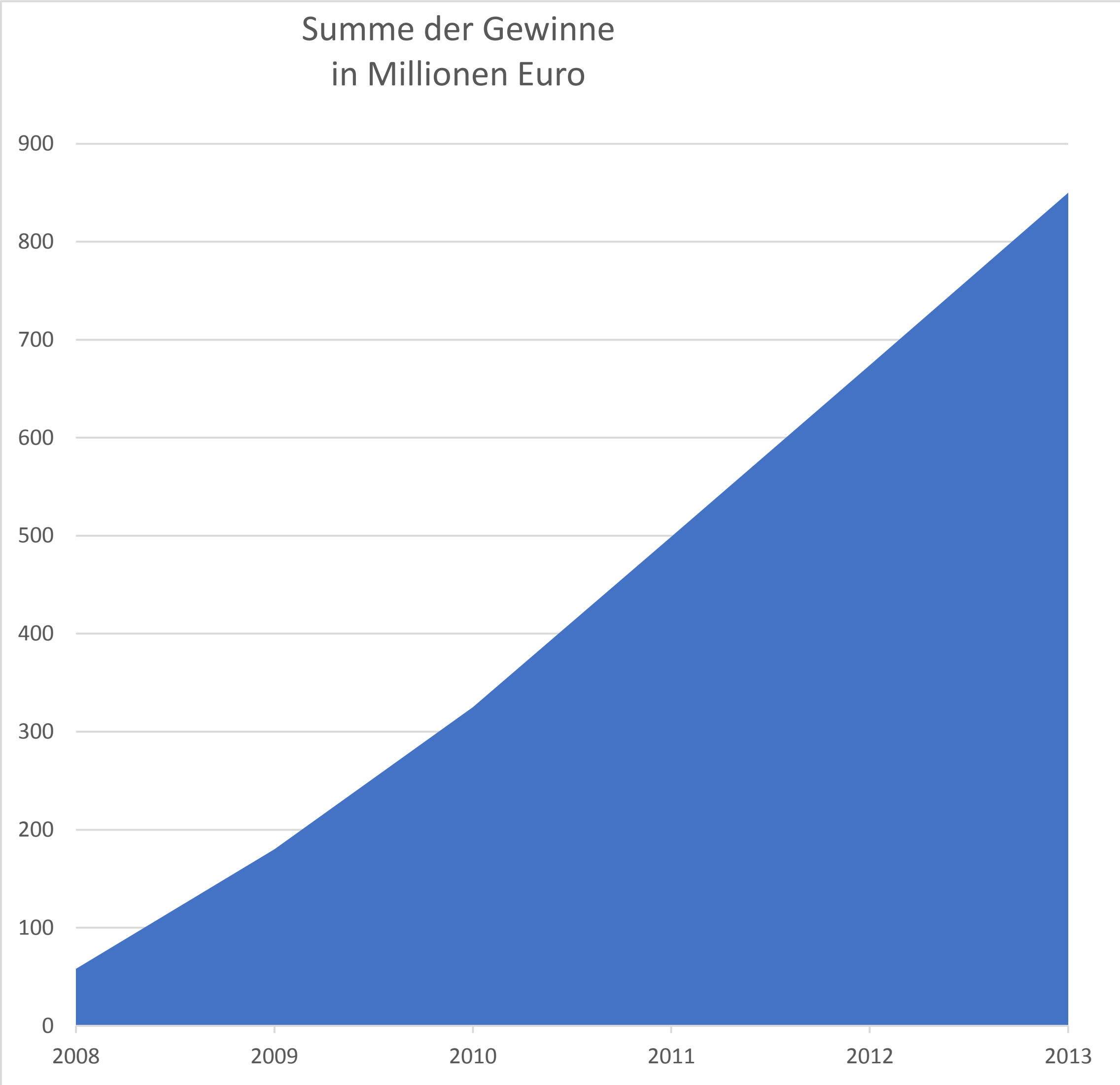


Abbildung 15: Diagramm zum Firmengewinn (4)

Nun sind Sie an der Reihe: Erstellen Sie auch einige positive Varianten!

Wir spielen Käufer und gelangen zu folgendem Diagramm:

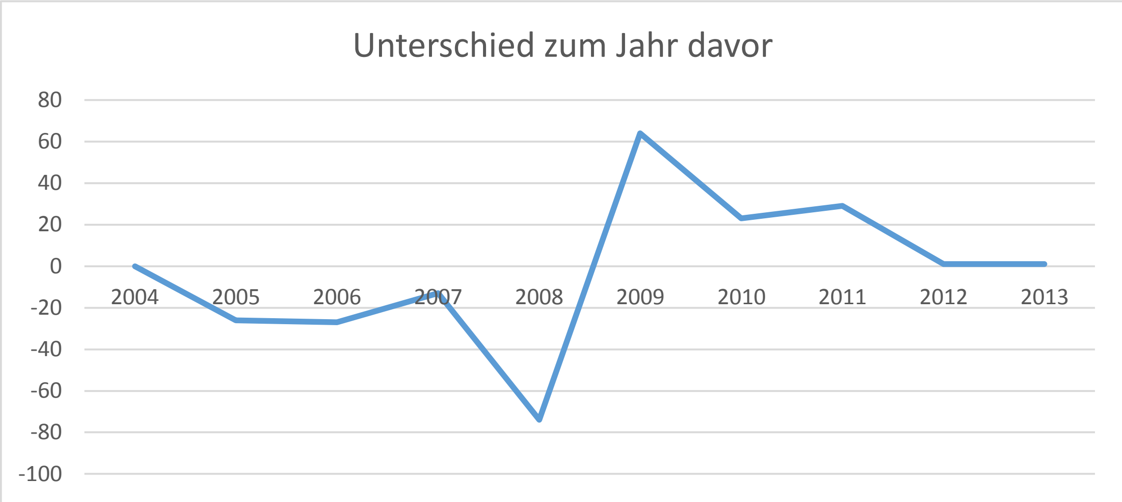


Abbildung 16: Diagramm zum Firmengewinn (5)

So sieht die Entwicklung bestenfalls stagnierend aus. Nach dem glücklichen Jahr 2009 geht es eher abwärts.

Nun sind Sie an der Reihe: Erstellen Sie auch einige negative Varianten!

Kommentar: Wir sind davon überzeugt, dass die spielerische Note dazu beiträgt, sich intensiver mit den Möglichkeiten zu befassen, eine Reihe von Daten grafisch darzustellen. Wer selbst einmal mit manipulativer Absicht eine Grafik erstellt hat, ist auch eher bereit und in der Lage, von anderen manipulierte Grafiken als solche zu erkennen.

Mogelpackungen – Volumen schätzen

Der Vergleich von scheinbarem Volumen und tatsächlichem Inhalt einer Verpackung ist vielfach Thema des Mathematikunterrichts gewesen; die MUED hat dazu fast von Beginn an Unterrichtsvorschläge dazu entwickelt und erprobt.

Überblick:

Wer das Volumen von Konsumartikeln richtig einschätzen kann und sich weniger durch aufwendige Verpackungen täuschen lässt, kann viel Geld sparen. In dieser Unterrichtseinheit sollen Kenntnisse in der Berechnung des Volumens von Quadern genutzt werden, um das Verhältnis von tatsächlichem Volumen der gekauften Ware und scheinbarem Volumen besser einzuschätzen. Ganz analog lässt sich auch mit Zylindern, Pyramiden und andere Verpackungsformen arbeiten. Wenn das Volumen zu schwer zu berechnen ist, kann es durch Eintauchen in Wasser gemessen werden.

> Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung:

Wir schlagen vor, alle Schülerinnen und Schüler einzuladen, quaderförmige Verpackungen von Konsumgütern in den Mathematikunterricht mitzubringen. Die Quader werden vermessen, das Volumen wird berechnet. Dann wird mit der Inhaltsangabe auf der Packung verglichen. Wie viel Prozent des Volumens des Verpackungsquaders hat der Inhalt? Gibt es nachvollziehbare Gründe für einen möglichen Unterschied, etwa Platz für Wärmeausdehnung? Lassen sich die Produkte charakterisieren, bei denen der Unterschied besonders groß ist? Wir gehen davon aus, dass bei Luxusprodukten der Unterschied besonders groß ist. Bei einigen Produkten ist der Verpackung „nur“ funktional: Mehl, Zucker, Butter, Kaffee werden unmittelbar umgeben. Das tatsächliche und das sichtbare Volumen stimmen fast überein. Kosmetika und Spielzeug hingegen haben oft Verpackungen, die viel mehr Inhalt vortäuschen als tatsächlich vorhanden ist. Hier ist es sinnvoll, auf das „Kleingedruckte“ zu achten: Irgendwo auf der Verpackung steht, was tatsächlich darin ist.

Kommentar: Am Beispiel Mogelpackungen lässt sich einfach und direkt ein Realitätsbezug herstellen. Für den Fall allzu großer Entrüstung bei den Schülerinnen und Schülern kann auch vorgeschlagen werden, die andere Position einzunehmen. Stellt Euch vor, Ihr wollt Parfüm verkaufen. Wie würdet Ihr es verpacken? Im Internet gibt es zum Stichwort „Mogelpackungen“ viele Texte zum Nachlesen, z.B. http://www.vz-nrw.de/Mogelpackungen-Tricksereien-mit-viel-Luft-und-doppeltem-Boden

Schatzkarte

Die Idee zum folgenden Beispiel haben wir in verschiedenen Varianten (s. abschließender Kommentar) im Fachdidaktischen Seminar in Linz besprochen.

Überblick: Zu einem typischen Piratenfilm gehört eine Schatzkarte. Dort findet sich entweder ein Kreuz an der Stelle, wo der Schatz begraben ist oder eine Wegbeschreibung zu diesem Punkt. Offenbar muss eine nützliche Schatzkarte deutlich genauer sein als dieses Symbolbild aus dem Internet (http://de.all-free-download.com/frei-vektoren/vektoren-clip-art/schatzkarte_116486.html).

> Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Das Zeichnen einer schönen und informativen Schatzkarte ist eine lehrreiche und interessante Aufgabe für die Schülerinnen und Schüler. Wir beginnen also nach einer Einführung ins Thema gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern, Kriterien für eine gute und informative Schatzkarte aufzustellen. Besonders wichtig ist dabei offensichtlich die Genauigkeit. Eine Angabe wie „Am Strand in Osten von Madagaskar“ reicht dabei sicher nicht. Falls diese Unterrichtseinheit nicht während einer Exkursion oder Klassenfahrt stattfindet, muss der Schatz (eine Süßigkeit oder nur eine Markierung) im Klassenzimmer oder im Schulbereich versteckt sein.

Als Methode schlagen wir vor, dass kleine Gruppen von Schülerinnen und Schülern sich einen Platz aussuchen, an dem ihr Schatz versteckt sein soll, eine Karte mit Kreuz oder Beschreibung erstellen und dann ihre Karte mit einer anderen Gruppe tauschen, um deren Schatz zu finden. Je nach zur Verfügung stehender Zeit testen so mehrere Gruppen jede Karte und beurteilen sie. Zum Schluss entscheidet die Klasse aufgrund der Tests und der Beurteilung von Karten mit Hilfe der eingangs festgelegten Kriterien, welche Karte am besten ist.

Kommentar: Der Vorschlag kann eine angenehme kleine Abwechslung im Unterricht sein, ein Lernen mit allen Sinnen, das zur Nachhaltigkeit des Gelernten beiträgt. Wenn intensiver über die Frage der Genauigkeit nachgedacht werden soll, können auch Bezüge zur Normierung von Längeneinheiten (falls in den Karten Schritte oder Fußlängen als Längeneinheit verwendet wurde) oder zur Geografie (Kartenzeichnen, Maßstab,…) hergestellt werden.

Klassenraum anstreichen

Die Idee zum folgenden Beispiel haben wir im Rahmen des Projekts „Power Girls“ entwickelt (http://www.edugroup.at/praxis/portale/powergirls/projekt.html).

Überblick: Das Klassenzimmer soll innen neu angestrichen werden. Die anzustreichende Fläche soll genau vermessen und berechnet werden. Dann soll überlegt werden, welche Genauigkeit möglich und sinnvoll ist. Um die richtige Menge Farbe einzukaufen zu können, ist es notwendig, die anzumalenden Flächen zu berechnen. Wer diese Fläche in der Realität falsch berechnet, kauft zu viel oder zu wenig Farbe.

> Frage: Wie würden Sie aus dieser Information eine Aufgabe stellen? Dürfen wir Sie bitten, einige Notizen zu machen, damit Sie Ihren Weg mit unserem Vorschlag vergleichen können?

Ausführung: Ausgangspunkt ist eine kleine Einleitung der Lehrkraft, die den Rahmen für die Doppelstunde setzt und zur Mitarbeit motivieren soll: *Heute hat mir die Direktorin unserer Schule erzählt, dass die Klassenräume neu angestrichen werden sollen. Dabei dachte ich mir, dass das eine gute Gelegenheit ist, mitzubestimmen, welche Farbe (oder sogar verschiedene Farben?) wir wollen. Da die Schule nur sehr wenig Geld für das Anstreichen bekommt, dürfen wir nichts verschwenden und müssen vorher genau bestimmen, wie viel Farbe wir brauchen.*

Wenn gemeinsam geplant wird, was zu tun, werden die beiden folgenden Punkte auftauchen:

a) Der Raum muss genau vermessen werden

b) Zusätzliche Informationen zur Farbe werden benötigt: Wie viel Farbe pro Quadratmeter wird gebraucht?

Der Klassenraum wird von allen Schülerinnen und Schülern (am besten in kleinen Arbeitsgruppen) vermessen. Dazu muss jedoch erst einmal gemeinsam geplant werden, was und wie gemessen werden soll.

1. Frage: Welche Flächen sollen überhaupt neu gestrichen werden? Fußboden, Holzvertäfelungen etc. scheiden aus. Soll die Decke neu gestrichen werden? Ja!

2. Frage was genau soll ausgemessen werden?

Gesamtfläche minus Teilflächen für Fenster, Türen, Schränke (je nachdem, ob fest anmontiert oder nicht), etc. Wie steht es mit kleinen Teilflächen wie Lichtschalter? Erst ausmessen, dann in der Diskussion über die Messergebnisse (s.u.) berücksichtigen.

3. Frage: Wer misst was? Alle messen alles!

Anmerkung: Die Lehrkraft kann an dieser Stelle Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad nehmen, indem die Regeln für das Ausmessen einfacher oder schwerer werden, also z.B. kleine Teilflächen berücksichtigt werden sollen oder nicht.

Die Schülerinnen messen Wände und Decke (indem sie den Fußboden ausmessen) und berechnen die Gesamtfläche. Sie werden angehalten, alle Messergebnisse und Berechnung genau aufzuschreiben, damit alles zum Schluss gut verglichen werden kann.

Die Lehrkraft geht in dieser Phase von Gruppe zu Gruppe, achtet auf die Zusammenarbeit und berät auf Anfrage.

Zum Abschluss wird die Präsentation der Ergebnisse vorbereitet. Die Gruppen berichten der Gesamtgruppe über ihr Ergebnis. Jede Gruppe berichtet über ein Teilergebnis: 4 Wände + Decke. Jedes Ergebnis wird von allen bestätigt bzw. mit dem eigenen Ergebnis verglichen und daraufhin gegebenenfalls in Zweifel gezogen. Im Zweifelsfall wird noch einmal gemeinsam nachgemessen bzw. nachgerechnet. Das Gesamtergebnis und der Weg dorthin werden gemeinsam betrachtet. Wie genau ist es? Wie groß ist der Fehler, wenn alle Längen um einen Millimeter zu kurz oder zu lang gemessen wurden?

Wie bedeutsam ist der Fehler? An dieser Stelle sollte eine Information aus dem Warenhaus eingebracht werden. Farbe wird nicht in Millilitern verkauft. Die kleinste Packungsgröße ist z.B. 2,5 Liter – und das reicht für etwa 25 Quadratmeter Hier empfiehlt sich ein Besuch beim Maler oder beim Baumarkt, auch eine Suche per Internet. Damit wird (hoffentlich!) ein heftiger Protest der Schülerinnen und Schüler ausgelöst. Weshalb mussten wir so genau rechnen? *Antwort*: Damit ihr lernt, bei einer realitätsbezogenen Aufgabe auf die praktische Bedeutung einer Antwort zu achten. Das lernt ihr am besten durch Erfahrung.

Kommentar: An solchen kleinen Projekten ist hauptsächlich der geänderte Stellenwert von Resultaten wichtig. Wenn sich beim Nutzen des Taschenrechners ein Tippfehler einschleicht und statt drei Eimer Farbe 30 Eimer Farbe herauskommt, kann das sehr teuer werden, falls es niemandem auffällt. Wenn bei einer typischen Schulbuchübung ein vergleichbarer Tippfehler vorkommt, gibt es für diese Aufgabe keinen Punkt – das hat aber deutlich andere Konsequenzen, als auf 27 Eimern Farbe zu sitzen, die nicht gebraucht werden. Hier können die Schülerinnen und Schüler lernen, dass ihre Anwendung von Mathematik Konsequenzen im realen Leben haben kann, für die sie sich verantworten müssen. Falls deutlich zu viel Geld ausgegeben wird, stellt sich schnell die Frage nach der Schuld und den Schulden, die daraus entstehen.

Kapitel 6: Zwei Beispiele für größere Projekte

In den beiden vorangegangenen Kapiteln haben wir versucht zu zeigen, wie sich ausgehend von bekannten Schulbuchaufgaben Modellierungsprozesse initiieren lassen und wie es gelingen kann, mit einer mathematischen Brille naheliegende Problemstellungen für den Mathematikunterricht zu finden. Daraus lassen sich kleinere Modellierungen für den täglichen Unterricht entwickeln, mathematische Inhalte erlernen und mathematische Kompetenzen vermitteln.

Wer sich mit der mathematischen Brille „auf den Weg“ macht, wird nicht nur kleinere Problemstellungen finden, die in kürzerer Zeit im Unterricht umgesetzt werden können, sondern auch Themen, mit denen Lehrende und Lernende noch nicht vertraut sind, in denen aus ihrer subjektiven Sicht nicht sofort viel Mathematik zu entdecken ist oder die (zunächst) so komplex erscheinen, dass sie gar nicht im Unterricht thematisierbar scheinen.

Das kann abschrecken. Aus unserer Erfahrung zeigt sich aber, dass Lehrkräfte, die gerne auch solche Problemstellungen im Unterricht thematisieren wollen, in deutschsprachigen Ländern Unterstützung von Personen aus der Fachdidaktik aber auch der Fachwissenschaft finden. Das sind Personen, die solche Projekte selbst durchführen bzw. die Aktivitäten wie Modellierungstage, eine Modellierungswoche oder auch singuläre Modellierungsprojekte aktiv durch die zur Verfügung Stellung von Ideen begleiten und beraten.

Nach unserer langjährigen Erfahrung mit solchen Umsetzungen sind wir inzwischen davon überzeugt, dass nach wenigen eigenen Erfahrungen die Begleitung durch Personen wie uns nicht mehr notwendig ist, um zu einem motivierenden und einer gelungenen Unterricht beizutragen, da Lehrkräfte, die bereits länger mit uns zusammenarbeiten, inzwischen selbst eigene Ideen einbringen und zudem andere Kolleginnen und Kollegen begleiten. Oft wächst der Umfang der Projekte, die im Mathematikunterricht umgesetzt werden, mit der Erfahrung der Lehrenden und Lernenden, mit ihrem Lernprozess in Sachen Modellierung und realitätsbezogenem Mathematikunterricht.

Wir wollen in diesem Kapitel an zwei Beispielen zeigen, wie größere Modellierungs-Projekte über einen längeren Zeitraum umgesetzt werden können. Größere Projekte sind aber nicht oft solche, die für mehrere Wochen das einzige Thema sind, sondern meist solche, die sich in einige Unterthemen aufteilen lassen und diese in Form einer Spirale immer wieder aufgreifen und um einen neuen Aspekt bereichern lassen.

Weil die Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler bei solchen Umsetzungen im Fokus steht ist es uns auch wichtig darauf hinzuweisen, dass es sich dabei keinesfalls um ein Arbeiten ohne Plan handelt. Im Gegenteil bei einer solchen Umsetzung ein strukturiertes und geplantes Vorgehen besonders wichtig. Wie solche Projekte bzw. Projektideen methodisch umgesetzt werden können, ist in der Literatur bereits oftmals festgehalten. Wir empfehlen an der Stelle, wenn Sie sich allgemein darüber informieren wollen, Bücher wie das von J. Bastian u.a. (1997) oder einen Erlass des österreichischen Ministeriums für Unterricht, Kunst und Kultur (https://www.bmbf.gv.at/ministerium/rs/2001_44.html), der sicherlich in analoger Weise in Deutschland für eigene Zwecke hilfreich sein kann.

Möchten Sie sich hingegen eher fachbezogen informieren, empfehlen wir die Dissertation von M. Ludwig (1997) oder auch Texte von K. Frey (z.B. 2005). Aus unserer Perspektive gelingt es in der dort (und im folgenden) beschriebenen Weise, einen Lernprozess zu motivieren, der „ein aktiver individueller Konstruktionsprozess, in dem Wissensstrukturen verändert, erweitert, vernetzt, hierarchisch geordnet oder neu generiert werden“ (Prenzel et al. 2004, S. 318) ist.

Projektphasen

Wir schlagen vor, in einem Projekt die folgenden Phasen zu durchlaufen. Zunächst listen wir sie auf, den erläutern wir sie am Beispiel.

Phase 1: Projektidee/Themenfindung

„Wichtig ist, dass das Interesse aller Beteiligten geweckt werden kann und genügend Zeit zur Verfügung steht, damit sich Lehrende und Lernende gemeinsam auf ein Thema, das sie bearbeiten, oder auf ein Problem, das sie lösen wollen, einigen können." (bm:bwk, 2001, S. 4).

Phase 2: Zielformulierung und Planung

„Durch die Formulierung von Zielen werden auch die unterschiedlichen Interessen sichtbar, können Unterthemen diskutiert und ein anzustrebendes Ergebnis festgelegt werden. Die vorhandenen Rahmenbedingungen und Ressourcen müssen analysiert werden und in der Planung Berücksichtigung finden, die Verantwortlichkeiten für die einzelnen Teilbereiche müssen festgelegt werden." (bm:bwk, 2001, S. 4)

Phase 3: Vorbereitungszeit

„Diese Zeit dient der umfassenden Informationsbeschaffung, der Besorgung notwendiger Arbeitsmaterialien, der Planung von Exkursionen, Diskussionen mit Fachleuten, Filmvorführungen u.ä. Im Zuge dieser Vorbereitungsarbeiten können sich organisatorische oder inhaltliche Änderungen am Projektplan als notwendig erweisen." (bm:bwk, 2001, S. 4-5)

Phase 4: Projektdurchführung

„In diesem Abschnitt wird die inhaltliche Hauptarbeit geleistet. Die geplanten Vorhaben werden von den Schülerinnen und Schüler in unterschiedlichen Sozialformen möglichst selbstständig durchgeführt, die Lehrenden stehen dabei als koordinierende Beraterinnen und Berater und Expertinnen und Experte und als „Konfliktmanagerinnen und -manager" zur Verfügung. Während dieser Zeit ist es besonders wichtig, in (kurzen) Reflexionsphasen („Fixpunkten") Erfahrungen und Zwischenergebnisse auszutauschen, aufgetretene Probleme zu besprechen, koordinierende Maßnahmen zu setzen und den Verlauf des Projekts und die emotionale Befindlichkeit der Projektmitarbeiterinnen und -mitarbeiter zu überprüfen." (bm:bwk, 2001, S. 5)

Phase 5: Projektpräsentation/Projektdokumentation

„Projektunterricht ist durch einen klar erkennbaren Abschluss gekennzeichnet. Dabei haben alle Beteiligten die Gelegenheit, ihre Arbeitsergebnisse einander vorzustellen und wenn möglich einer breiteren Öffentlichkeit zugänglich zu machen. Entscheidend für die Wahl des Projektabschlusses muss sein, dass die Schülerinnen und Schüler durch die Präsentation Anerkennung und (konstruktive) Kritik ihrer Arbeit erfahren und dass die Ergebnisse des Projekts kommunizierbar werden. Die Dokumentation ist Teil des Projekts und eine wesentliche Grundlage für Präsentation, Öffentlichkeitsarbeit, Reflexion und Evaluation. Sie sollte daher Informationen über alle wichtigen Ergebnisse, Stadien des Arbeitsprozesses und Erfahrungen der Projektmitarbeiterinnen und -mitarbeiter liefern.“ (bm:bwk, 2001, S. 5)

Phase 6: Projektevaluation

„Die Evaluation dient der Überprüfung der Projektergebnisse und der Weiterentwicklung der Qualität künftiger Projekte. Grundlage für die Zielformulierungen in der Planungsphase sind die Fragestellungen: Was wollen wir zu welchem Zweck und mit welchen Mitteln erreichen? Prozessbegleitend und am Ende des Projekts werden diese Ziele auf Basis der gesammelten Daten hinsichtlich ihrer Erreichung bzw. Umsetzung systematisch bewertet.

In den Phasen der Projektreflexion werden die Erfahrungen der Beteiligten und die laufenden Prozesse besprochen. Die Projektreflexion ist ein unabdingbares Element der Evaluation. Sie erfolgt grundsätzlich durch die Akteurinnen und Akteure selbst; um die Gefahr „blinder Flecken“ in der eigenen Wahrnehmung zu vermeiden, ist es jedoch in manchen Bereichen der Evaluation unerlässlich, auch eine Außensicht einzubeziehen („kritische Freundinnen und Freunde“, Projektpartnerinnen und Projektpartner).“ (bm:bwk, 2001, S. 5)

Projekt 1: Sportwetten aus mathematischer Perspektive

Zu Beginn starten wir wieder mit einer Einladung zur aktiven Mitarbeit an Sie: was wissen Sie von Sportwetten? Wetten Sie selbst? Wissen Sie wie Quoten bestimmt werden und was sie bedeuten? Haben Sie zu Sportwetten eine eher positive oder negative Einstellung? Was halten Sie davon, wenn Sie erfahren, dass Ihre Schülerinnen und Schüler selbst (z.B. im Internet) um Geld wetten? Notieren Sie bitte einige Stichworte!

Was haben Sie aufgeschrieben? Haben Sie im Internet nachgeschaut, wie viele Milliarden Euro im letzten Jahre bei Sportwetten umgesetzt wurden? Gabe es aktuelle Zeitungsmeldungen über Menschen, die spielsüchtig sind, ihr ganzes Geld verwettet haben und dann versucht haben, mit kriminellen Methoden das verwettete Geld zurück zu bekommen? Hat es Wettskandale gegeben? Ist Ihnen aufgefallen, dass die Quoten für Favoriten deutlich kleiner sind als für Außenseiter? Irgendetwas lässt sich ahnen oder assoziieren über Quote zu Quotient zu umgekehrt proportional!

Nun starten wir mit unserem Vorschlag für das Thema Sportwetten – wie schon gewohnt mit der Motivation: Sportliche und von den Medien stark beachtete Großereignisse wie Europa- oder Weltmeisterschaften wirken auch in der Schule. Bisweilen lassen sich solche Ereignisse verwenden, um auf spezielle Thematiken einzugehen bzw. diese Schülerinnen und Schüler näher zu bringen. Mathematik-Lehrkräfte fühlen sich an dieser Stelle aber auch oft „ausgegrenzt", denn welche (Groß-)Ereignisse geben mathematisch so viel her, dass sie in den eigenen Unterricht einfließen können und dabei Mathematik gelernt wird? Viel zu oft scheint es so, als gäbe es mathematisch nichts her oder es wäre viel zu schwer.

Das stimmt aber so nicht! Wir möchten Sie an dieser Stelle anregen und unterbrechen für eine kurze Übung.

Überlegen Sie/Recherchieren Sie bitte, ob es (mediale Groß-)Ereignisse in der jüngeren Vergangenheit gegeben hat, die im Mathematikunterricht behandelt werden könnten.

Offenbar lassen sich immer wieder solche Ereignisse außerhalb des Sportes finden, in denen mathematische Werkzeuge sinnvoll eingesetzt werden können, um die Hintergründe und Zusammenhänge besser zu verstehen. Denken Sie nur an herkömmlichen Halbwertszeitaufgaben bei der Einführung der Exponentialfunktion und den Tsunami, der zur Katastrophe von Fukujima geführt hat. Denken Sie an Vorhersagen für Wetter und Klima, Umwelt- und Energieprognosen und Nutzungsalternativen, Meldungen zur wirtschaftlichen Lage und Entwicklung, Neue Technologien, elektronische Unterhaltung, Ernährung und Bekleidung. Wie aber ist es mit dem Sport? Es gibt eine Vielzahl von mathematischen Aspekten, weil es im Sport um Bewegung geht, die berechnet werden kann, um Punkte und Tabellen, um Statistiken über Erfolge (die z.B. beim Tennis nach jedem Satz eingeblendet werden) und um mathematisch gestützte Trainingsmethoden.

Wir haben ein Beispiel aus dem Bereich Fußball gewählt, bei dem es um viel Geld und die Gefahr der Spielsucht geht: Wetten. Ein immer wiederkehrendes Spektakel sind die Fußball-Weltmeisterschaften oder auch die Europameisterschaften, sowie die Champions-League, nationale Fußball-Ligen, Pokale etc. Überall ist sehr viel Geld im Spiel. Wo Geld im Spiel ist, hilft i. d. R. auch Mathematik zum besseren Verständnis der Geldflüsse! Daher haben wir die Idee – wir wollen Sportwetten mathematisch betrachten.

Warum? Mehrere Motive wirken zusammen. Beginnen wir mit dem pädagogischen Motiv: Wir hoffen, durch die rationale Behandlung im Mathematikunterricht dem Hang zum irrationalen Glücksspiel, dem drohenden Verlust des Geldes und des Lebensglücks durch Spielsucht entgegen wirken zu können. Mathematisch sind Sportwetten einfach zu verstehen, solange die Betrachtung auf die Basiswetten eingeschränkt wird. Kombinierte Wetten lassen wir weg; sie können mit mehr Mathematik aber selbstverständlich auch analysiert werden. Nicht zuletzt sind wir als Fußballfans verärgert darüber, dass durch Wetten und insbesondere Wettbetrug der Fußball negativ beeinflusst – und dadurch unsportlicher – wird (vgl. etwa: http://www.format.at/leben/sport/fussball/milliarden-geldwaesche-sportwetten-375224).

In dieses Buch haben wir die Sportwetten und den Wettbetrug als Beispiel für ein größeres Projekt mit vielen auch einzeln behandelbaren Unterthemen ausgewählt, weil es im Unterschied zu anderen Themen aus den Bereich Energie und Umwelt, Ernährung oder motorisierter Verkehr, zu denen wir an anderer Stelle Unterrichtsvorschläge publiziert haben, weniger viel Hintergrundinformation voraussetzt.

Projektstart: Wie starten wir?

Zunächst versuchen wir einen Wettschein zu analysieren. Die darauf zu findenden Zahlen in entsprechender Anordnung suggerieren bereits, dass darin viel Mathematik enthalten sein kann. Unsere informellen Umfragen in Klassen und Studierenden haben dazu jedoch auch genau das Gegenteil gezeigt. Schülerinnen und Schüler wie auch Studierende verbinden zunächst nicht unbedingt Mathematik mit dem Thema der Sportwetten.

Aus Gründen der Aktualität und der Bildrechte verzichten wir an dieser Stelle auf einen Screenshot von einem Wettanbieter, wie Sie ihn leicht im Internet finden, z.B. unter https://www.tipico.de/de/online-sportwetten/. Im Zentrum des Bildes stehen Wettangebote zum Fußball; eine Reihe von Spielen wird aufgelistet, die in Kürze stattfinden werden. Neben dem Datum und der Uhrzeit stehen in einer Zeile die Namen der beiden Mannschaften, etwa Bayern München und Hamburger SV oder FC Valencia gegen AS Monaco. Daneben stehen die aktuellen Quoten (mehr dazu s.u.) und einige Schaltflächen, mit denen Zusatzinformationen und weitere Wettmöglichkeiten (z.B. „Wer schießt das 1.Tor?“ oder „Schießen beide Teams ein Tor?“) angeklickt werden können.

Wir konzentrieren uns zunächst darauf, eine der hier dargestellten Wetten zu interpretieren. Dazu greifen wir das Spiel 1. FC Nürnberg gegen Erzgebirge Aue heraus. Hier sehen wir für den Tipp „1. FC Nürnberg gewinnt das Spiel“ eine Quote von 1,55 (Tipp 1), d. h. dass bei einem Einsatz von 1 Euro der Betrag von 1,55 Euro je eingesetztem Euro bei Eintreten dieses Ergebnis ausgeschüttet wird; analog können die Quoten für den Sieg von Erzgebirge Aue (Tipp 2, Auszahlung 5,70 Euro pro Euro Einzahlung) oder Unentschieden (Tipp X, Auszahlung 4,10 Euro pro Euro Einzahlung) interpretiert werden. Können wir diese Information nun mathematisch interpretieren?

Aus Sicht des Wettbüros ist offenbar der 1. FC Nürnberg Favorit, während Erzgebirge Aue eher der Außenseiter in diesem Spiel ist. Je höher die Auszahlung pro Euro (oder die Quote) ist, desto weniger wahrscheinlich ist aus der Sicht des Wettbüros ein Sieg dieser Mannschaft.

Wenn wir diese Interpretation nun mehr mathematisch formulieren wollen, heißt das, der 1. FC Nürnberg wird dieses Spiel *wahrscheinlich* gewinnen, es ist sehr *unwahrscheinlich*, dass das Spiel unentschieden ausgehen wird und dass Erzgebirge Aue als Sieger vom Platz gehen wird, ist aus Sicht dieses Wettbüros *noch unwahrscheinlicher*! Wir haben an dieser Stelle drei Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet, die bereits in der Grundschule Einzug halten. Aber wie können wir von der Quote auf die Wahrscheinlichkeit schließen? Die Ermittlung dieses Wertes erfolgt durch einfache Kehrwertbildung, d. h.:

$$P(Gewinn) = \frac{1}{Quote}$$

Diese Formel kann man auch durch eine Recherche im Internet ausfindig machen (vgl. etwa http://www.wettfreunde.net/).

Für unser Spiel, heißt das also:

	Tipp 1:	Tipp X:	Tipp 2:
1.FC Nürnberg : Erzgebirge Aue	1,55	4,1	5,7
In Wahrscheinlichkeiten	0,64516	0,24390	0,17543

Folgen wir der Assoziation Quote => Quotient, gelangen wir von Vermutungen über Wahrscheinlichkeiten von Siegen zu Zahlenwerten. Nach Ansicht des Wettbüros ist P(„1. FC Nürnberg gewinnt das Spiel“) = 1 : 1,55= 0,64516. Entsprechend ist P(„Erzgebirge Aue gewinnt das Spiel“) = 0,17543. Bevor wir uns (und das Wettbüro bzw. die einschlägige Literatur dazu) fragen, woher diese Wahrscheinlichkeiten kommen, machen wir einen nahe liegenden Plausibilitätstest.

Haben wir nun die Einzelwahrscheinlichkeiten für einen Spielausgang ermittelt, ist es sinnvoll nachzurechnen, wie hoch die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten ist!

1/1,55+1/4,1+1/5,7=1,06450

Haben wir falsch gerechnet? Die mathematische Hintergrundtheorie besagt doch, dass die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss!? Betrachten wir dazu dasselbe Spiel in einem anderen Wettbüro (https://www.bet3000.com/de/): Dort finden wir die Quoten

	Tipp 1:	Tipp X:	Tipp 2:
1.FC Nürnberg : Erzgebirge Aue	1,70	4,0	5,0
In Wahrscheinlichkeiten	0,58823	0,25	0,2

Es scheint uns an der Stelle bemerkenswert zu erwähnen, dass dieses andere Wettbüro Wetten auf dasselbe Spiel anbieten, die sich aber doch ein wenig unterscheiden. Betrachten wir an dieser Stelle wieder die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten, so erkennen wir, dass die Summe wieder nicht 1 ergibt: 1/1,70+1/4,00+1/5,00=1,03823

Auch mehrmaliges Nachrechnen führt an dieser Stelle zu keinem anderen Ergebnis – für beide Summen der Einzelwahrscheinlichkeiten nicht. Es muss also einen anderen Grund geben, der ein solches Ergebnis rechtfertigt!

Um Ihnen ein wenig Zeit zum Nachdenken zu geben möchten wir Ihnen an dieser Stelle eine weitere Aufgabe stellen

Aufgabe: Betrachten Sie gleiche Spiele bei unterschiedlichen Wettanbietern und führen Sie die eben gezeigten Überlegungen aus. Was können Sie entdecken? Beschreiben Sie ihre Entdeckungen und formulieren Sie eine Hypothese!

Egal welche Spiele wir bei Wettbüros betrachten, es zeigt sich immer ein ähnliches Ergebnis: wenn wir die Einzelwahrscheinlichkeiten der möglichen Einzelereignisse addieren, erhalten wir einen Wert größer als 1. Die Begründung dazu ist relativ einfach: der Differenzbetrag zu 1 ist nichts anderes als der prozentuelle Gewinn, den das Wettbüro pro abgegebener Wette kassieren kann. D. h. für unser Spiel 1. FC Nürnberg gegen Erzgebirge Aue kassiert Wettbüro 1 6,45% der auf dieses Spiel eingegangenen Gesamtsumme (in Euro), Wettbüro 2 hingegen nur 3,82%

(wenn die Quoten den Einsätzen entsprechen – siehe unten).

Eine erste wichtige Entdeckung haben wir damit bereits gemacht. Es ist uns möglich, Wettbüros miteinander (an ihrem Gewinn) zu vergleichen oder die gewinnbereinigte Wettquote zu bestimmen! Vermutlich ist es für ein Wettbüro am Internetmarkt durchaus schwierig zu entscheiden, ob sie bessere Quoten anbieten oder mehr Provision verdienen wollen – im Internet sind Quoten schnell vergleichbar. Das bringt uns auf die Frage, woran ein Wettbüro eigentlich verdient?

Versuchen wir nun gemeinsam, das bisher aufgeführte zum Thema Sportwetten im Fußball zusammenzufassen und an einigen Beispielen durchzurechnen. Menschen wetten Geld auf ein Ergebnis, das sie erhoffen oder erwarten, ein Buchmacher nimmt das Geld an und garantiert, den Quoten gemäß, zu denen das Geld angenommen wurde, Gewinne auszuzahlen. Dabei möchte der Buchmacher selbst etwas verdienen – möglichst nicht durch Glück beim Wetten, sondern durch eine Provision, einige Prozente auf den Umsatz. Wir schauen uns später noch einige Fälle an, in denen ein Buchmacher (unfreiwillig) mitwettet, um zu überprüfen, welche Risiken er dabei eingeht.

Erste Modellierung

Zunächst ein vereinfachtes Rechenbeispiel: Auf Mannschaft A werden 10000 Euro gesetzt, auf Mannschaft B 20000 Euro und auf Unentschieden 30000 Euro. Wenn der Buchmacher die Quoten nach den Einsätzen berechnet (der einfache Fall; in der Realität heißt ein solcher Buchmacher „Totalisator“) und **nichts** verdienen möchte, entstehen folgende Quoten.

Sieg Mannschaft A: 10000/(10000+20000+30000)= 1/6, die Quote also 6 zu 1 oder kurz 6

Sieg Mannschaft B: 20000/(10000+20000+30000)= 2/6, die Quote also 3 zu 1 oder kurz 3

Unentschieden: 30000/(10000+20000+30000)= 3/6, die Quote also 2 zu 1 oder kurz 2

Im Internet würde also stehen:
Mannschaft A: 6 Tipp X: 2 Mannschaft B: 3

Was passiert, wenn Mannschaft A tatsächlich gewinnt? Für jeden Euro, der auf Mannschaft A gesetzt wurde, werden vom Buchmacher 6 Euro ausgezahlt, also insgesamt 60000 Euro.

Was passiert, wenn Mannschaft B tatsächlich gewinnt? Für jeden Euro, der auf Mannschaft B gesetzt wurde, werden vom Buchmacher 3 Euro ausgezahlt, also insgesamt 60000 Euro.

Was passiert bei einem Unentschieden? Für jeden Euro, der auf Unentschieden gesetzt wurde, werden vom Buchmacher 2 Euro ausgezahlt, also insgesamt 60000 Euro.

Zusammen: Wer seine Wette gewonnen hat, erhält entsprechend der Quote eine Gewinnauszahlung, der Buchhalter bekommt am Ende nichts. Weshalb sollte er in einem solchen Fall Buchhalter sein? Er hat Unkosten für Räume, Personal, Internet etc. und möchte doch zudem auch etwas verdienen!

Nehmen wir an, er möchte 10 Prozent Provision. Wie muss er dann die Quoten ändern? Nun sind Sie an der Reihe (bzw. in Ihrem Unterricht Ihre Schülerinnen und Schüler)! Haben Sie eine Idee? Rechnen Sie bitte die Quoten so aus, dass der Buchmacher in diesem Beispiel 10 Prozent vom eingesetzten Geld behält.

Wir rechnen auf zwei Wegen, einmal ziehen wir die 10% vom Einsatz ab und einmal von der Auszahlung – auf jeden Fall behält der Buchmacher 6000 Euro, also 10% Provision vom Umsatz.

Wenn die 10% gleich vom Einsatz einbehalten werden, verringern sich die Einsätze auf die drei Möglichkeiten um je 10% auf 9000 Euro (Sieg Mannschaft A), 18000 Euro (Sieg Mannschaft B) und 27000 Euro

(Unentschieden). Wie lauten dann die Quoten?

Sieg Mannschaft A: 9000/(9000+18000+27000)= 1/6, die Quote also 6 zu 1 oder kurz 6
Sieg Mannschaft B: 18000/(9000+18000+27000)= 2/6, die Quote also 3 zu 1 oder kurz 3
Unentschieden: 27000/(9000+18000+27000)= 3/6, die Quote also 2 zu 1 oder kurz 2

Die Quoten ändern sich demnach nicht. Die Summe der Gewinnerwartungen (1/6+2/6+3/6 = 1) bleibt bei 1. Für uns ist das nicht überraschend, Ihre Schülerinnen und Schüler können das selbst entdecken und überlegen, ob das auch für andere Wetteinsätze gilt. Weshalb? Wir nennen nur das Stichwirt „linear“ und wenden uns der zweiten Vorgehensweise zu, „rückwärts“, also von der Auszahlung her zu rechnen.

Statt 60000 Euro möchte der Buchmacher nur 54000 Euro auszahlen, weil er 6000 Euro einnehmen möchte. Was passiert?

Falls Mannschaft A oder B gewinnt oder unentschieden gespielt wird, werden 54000 Euro ausgezahlt. Dadurch ändern sich die Quoten! Welche Quoten werden herauskommen?

Für Sieg Mannschaft A ist die neue Quote 5,4
Für Sieg Mannschaft A ist die neue Quote 2,7 und
Für Unentschieden ist die neue Quote 1,8.

Nun haben wir auf zwei verschiedenen Wegen herausgefunden, welche Auswirkungen es hat, wenn der Buchmacher seine Provision verdienen will. Welchen Weg würden Sie einschlagen? Wir stellen uns vor, wie Leute reagieren, die mit einer Quote 3 oder 6 tatsächlich nur das 2,7fache bzw. 5,4fache ihres Einsatzes ausbezahlt bekommen, wenn sie gewinnen. Auf Nachfrage von verärgerten Kunden gibt es dann einen Hinweis auf die Allgemeinen Geschäftsbedingungen, in denen steht, dass vom Gewinn 10% einbehalten werden. Das nächste Mal werden solche Kunden vermutlich einen anderen Buchmacher wählen. Wie unsere Eingangsbeispiele (und ein Blick auf Wetten im Internet) zeigen, gehen tatsächlich die Buchmacher den 2. Weg, d.h. sie senken die Quoten so, dass ihre Provision „unsichtbar“ abgezogen wird. Nur wer selbst nachrechnet (oder in den entsprechenden Informationen im Internet sucht), kann auf diese Weise erkennen, welcher Wettanbieter welche Provision einbehält. Nach unseren Eindrücken bewegen sich die Provisionen im Bereich bis zu 10 Prozent – der Konkurrenzdruck sorgt dafür, dass die meisten eher bei 5 Prozent liegen. In bestimmten Fällen (siehe das Beispiel Madrid – Elche unten) liegen die Provisionen sogar fast bei null Prozent. Hier bietet sich die Chance zu einer interessanten Hausaufgabe: Lassen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler an mehreren Beispielen nachrechnen, wie die Provision bei verschiedenen Wettanbietern ist.

Zusatzfrage: Wetten Buchmacher mit?

Nun ist es an der Zeit, eine unserer Modellannahmen genauer zu überprüfen. Wir haben vorausgesetzt, dass der Buchmacher ruhig schlafen und „nur“ an Provisionen verdienen will. Könnte er nicht versuchen, seine zweifelsohne besseren Informationen über die aktuelle Form der Mannschaften zu nutzen, um selbst mit zu wetten? Wir nehmen die Zahlen aus dem letzten Beispiel und überlegen, was passieren kann, wenn der Buchmacher aufgrund von Insiderinformationen davon überzeugt ist, dass Mannschaft A gewinnen wird. Er will deshalb 20000 Euro auf Mannschaft A setzen.

Die erste Variante ist vermutlich nicht geschickt: Der Buchmacher wird sein eigener Kunde und setzt wie ein beliebiger anderer Kunde 20000 Euro auf den Sieg von Mannschaft A. Da wir weiter davon ausgehen, dass dieser Buchmacher erst nach Eingang aller Wetten die Quote ausrechnet, hat sein Einsatz eine leicht auszurechnende Auswirkung auf die Quoten. Der Gesamteinsatz steigt von 60000 auf 80000 Euro, seine Provision von 6000 auf 8000 Euro und die Quoten liegen dann bei … bitte rechnen Sie es aus! Hier haben Sie (bzw. im Unterricht Ihre Schülerinnen und Schüler) schon wieder eine Gelegenheit für eine kleine Übung: Rechnen Sie bitte die veränderten Quoten aus!

Hier sind unsere Berechnungen (die Provision wird wieder auf Weg 2 abgezogen).

Für Sieg Mannschaft A ist die neue Quote 2,4, da 30000/72000 = 0,4166

Für Sieg Mannschaft B ist die neue Quote 3,61, da 20000/72000 = 0,277

Für Unentschieden ist die neue Quote 2,4, da 30000/72000 = 0,4166.

In dieser Rechnung ist die Summe der Gewinnerwartungen 0,4166 + 0,277 + 0, 0,4166 = 1,11. Teilen wir nun 1 durch 1,11 erhalten wir 0,9 – also 10 Prozent Provision.

Wenn der Buchmacher (oder jemand anderes) zusätzlich 20000 Euro auf den Sieg von Mannschaft A setzt, wird aus dem Außenseiter ein Favorit. Die Quote sinkt deutlich. Versuchen Sie einmal herauszufinden, bei welchem Einsatz die Quote wegen der Provision auf 1 oder weniger fällt! Wir kommen auf diese Rechnung weiter unten unter dem Stichwort „Wettbetrug“ wieder zurück – dieses Phänomen (sinkende Quote bei höherem Einsatz) begrenzt die Höhe des sinnvollen Einsatzes bei vergleichsweise geringerem Gesamtvolumen der Wetten. Auch hier schließt sich eine interessante Such-Hausaufgabe an: Wie hoch ist eigentlich die Summe der Einsätze für verschiedene Spiele bzw. insgesamt pro Tag oder Jahr? Informationen dazu gibt es Internet!

Wir kommen zu unserer Frage nach dem mit wettenden Buchmacher zurück und vermuten, dass er eine andere Variante wählen wird, um mit zu wetten. Haben Sie eine Idee? Wir vermuten, dass er die Quoten ändern kann, wenn er mitspielen will. Können Sie unsere Vermutung beweisen oder widerlegen?

Aufgabe: Welche Quote sollte der Buchmacher in welcher Weise ändern, um heimlich 20000 Euro auf den Sieg von Mannschaft A zu wetten? Was gewinnt oder riskiert er dabei?

Haben Sie schon eine Antwort? Wir haben auf Anhieb keine Antwort. Deshalb simulieren wir Auswirkungen von Quotenänderungen beim Totalisator (also dem Buchmacher, der die Quoten nach den Wetteinsätzen bestimmt). Wir stellen uns vor, dass er in der Zeit, in der er keine Wetten mehr annimmt, das Spiel aber noch nicht begonnen hat, bewusst eine oder mehrere Quoten ändert, um heimlich mitzuspielen, ohne offiziell etwas einzusetzen. Damit niemand etwas merkt, muss er noch darauf achten, dass aus den veränderten Quoten auch seine Provision von 10 Prozent nachgerechnet werden kann. Wir können wir diese Überlegungen simulieren? Mit Hilfe einer Tabellenkalkulation. Wir starten mit den Werten aus dem Beispiel, ändern die ausgerechneten Quoten und beobachten die Auswirkungen für die drei möglichen Spielausgänge. Auf Mannschaft A werden 10000 Euro gesetzt, auf Mannschaft B 20000 Euro und auf Unentschieden 30000 Euro, der Buchmacher setzt durch Quotenänderung 20000 Euro.

Beginnen wir mit den Basisdaten und den dazu ausgerechneten Quoten:

Wetteinsatz durch nachträgliche Quotenänderung		
Ausgangswerte	(Spalte A)	(Spalte B)
Einsatz auf Sieg	Mannschaft A	10000 (Zelle B 5)
	Mannschaft B	20000 (Zelle B 6)
Einsatz auf Unentschieden		30000 (Zelle B7)
Summe der Einsätze		60000 (Zelle B 9)
Provision in Prozent	10	
Quoten ohne Provision		
Sieg Mannschaft A	6	Formel: B9/B5
Sieg Mannschaft B	3	Formel: B9/B6
Unentschieden	2	Formel: B9/B7
Quoten mit Provision		
Sieg Mannschaft A	5,4	Formel: B9*(1-B11/100)/B5
Sieg Mannschaft B	2,7	Formel: B9*(1-B11/100)/B6
Unentschieden	1,8	Formel: B9*(1-B11/100)/B7
Test Provision	1,111111	Formel:1/B21+1/B22+ 1/B23

Es bleiben demnach 10 Prozent des Einsatzes als Provision.

Der Vollständigkeit halber listen wir auch die Auszahlungen auf:

Auszahlungen

54000	Formel: B21 * B5
54000	Formel: B22 * B6
54000	Formel: B23 * B7

Fazit

6000 Euro für den Buchmacher

Nun wagen wir einen ersten Versuch, die Quote für A zu ändern. Riskieren wir in der Simulation die doppelte Quote für den Sieg der Mannschaft A, also 10,8. Wie müssen wir die anderen Quoten ändern, damit im Test wieder als Summe 1,1111 herauskommt? Die Gewinnerwartung für Mannschaft A ändert sich durch die verdoppelte Quote von 0,1852 (=1/5,4) auf 0,0925 – wird also wie erwartet halb so groß. In der Summe aller drei Gewinnerwartungen fehlen 0,0925. Wir müssen also je die Hälfte von 0,0925 bei den beiden anderen Gewinnerwartungen hinzufügen und die Quoten entsprechend verringern.

Geänderte Gewinnerwartung A	0,0926
Geänderte Gewinnerwartung B	0,4166667
Geänderte Gewinnerwartung Tipp X	0,6018519
Testsumme	1,1111

Sieg Mannschaft A	10,8
Sieg Mannschaft B	2,4
Unentschieden	1,6615385

Das Ergebnis der Neuberechnung der Quoten entspricht unseren Erwartungen. Wenn eine Quote willkürlich erhöht wird, müssen die anderen „entsprechend“ gesenkt werden. Der wirklich spannende Punkt folgt nun: Wie ändern sich die Auszahlungen für die drei möglichen Spielresultate?

Auszahlungen		**Fazit**
108000,00	Formel: B31 * B5	-48000,00
48000,00	Formel: B32 * B6	12000,00
49846,15	Formel: B33 * B7	10153,85

Die willkürliche Änderung der Quoten hat deutliche Konsequenzen. Einmal fällt auf, dass der Buchmacher dadurch in Gefahr gerät, selbst viel Geld zu verlieren. Ausgerechnet dann, wenn sein Tipp richtig ist und seine Mannschaft A gewinnt, setzt er 48000 Euro zu. Wir haben also in unserem ersten Versuch die Quote für A in die falsche Richtung geändert.

Für unseren nächsten Versuch haben wir mehrere Möglichkeiten: Wir können die Quoten für einen Sieg der Mannschaft B oder ein Unentschieden hinaufsetzen oder die Quote für einen Sieg der Mannschaft A senken. Im nächsten Schritt müssen wir dann überlegen, wie wir den Wunsch des Buchmachers, maximal 20000 Euro einzusetzen, berücksichtigen können. Dabei wird dann noch zu überlegen sein, ob er maximal 20000 Euro verlieren will oder ob die Provision die Verlustgrenze sein soll.

Beginnen wir mit einer Senkung der Quote für einen Sieg der Mannschaft A. Wir laden Sie selbstverständlich ein, auch hier selbst etwas zu versuchen. Welche Quote wählen Sie? Wir starten mit der Hälfte, also 2,7. Unsere Tabellenkalkulation wirft dann folgende Ergebnisse aus:

Geänderte Gewinnerwartung A	0,3704
Geänderte Gewinnerwartung B	0,277778
Geänderte Gewinnerwartung Tipp X	0,462963
Testsumme	1,1111

Sieg Mannschaft A	2,7
Sieg Mannschaft B	3,6
Unentschieden	2,16

Auszahlungen		**Fazit**
27000,00	Formel: B31 * B5	33000,00
72000,00	Formel: B32 * B6	-12000,00
64800,00	Formel: B33 * B7	-4800,00

Diesmal geht es in die richtige Richtung. Wenn die Quote für den Sieg der Mannschaft A gesenkt wird, steigt der Gewinn des Buchmachers, wenn Mannschaft A tatsächlich gewinnt. Zusätzlich zur Provision von 6000 Euro bekommt er 27000 Euro. Allerdings ist diese Hoffnung auf zusätzlichen finanziellen Gewinn auch mit einem finanziellen Risiko verbunden. Wenn Mannschaft B gewinnt, verliert er 12000 Euro und im Falle eines Unentschieden 4800 Euro.

Wir haben noch eine Frage offen: Wir wollen noch überlegen, ob er maximal 20000 Euro verlieren will oder ob die Provision die Verlustgrenze sein soll. Wenn wir diese Überlegung anstellen, müssen wir herausfinden, wie wir das Modell in der Tabellenkalkulation nutzen können, um rückwärts zu rechnen, d.h. von einem maximalen Verlust auf eine zu wählende Quote kommen.

Anmerkung zur Unterrichtsmethodik

Hier steht eine Entscheidung für den Mathematikunterricht an. Mit ein wenig systematischem Probieren kann in der Tabellenkalkulation nach dem Vorbild der Intervallschachtelung ein passender Wert gefunden werden oder die Funktionen, die wir zur „Vorwärts“-berechnung verwendet haben, werden zu einer (hoffentlich umkehrbaren) Funktion zusammengesetzt, die dann analysiert werden kann. Der zweite Weg führt ein Stück weg vom Ausgangsproblem und kann die Grenzen der in dieser Schulklasse vorhandenen mathematischen Kompetenz überschreiten oder erweitern – je nachdem, um welche Funktion es geht. In einigen Fällen gibt es noch einen Weg zwischen systematischem Probieren und Funktion aufstellen und analysieren, nämlich vom Computer eine Funktionsgrafik erstellen lassen und betrachten. Da es nicht um eine analytisch exakte Lösung geht, sondern auf zwei Stellen hinter dem Komma genau eine passende Quote gefunden werden soll, reicht das oft für die Praxis durchaus.

Wir gehen diesen Weg über eine Interpretation von Grafik an einem anderen Beispiel weiter unten (Stichwort: Schätzen des Grenz-Ertrags von Wettbetrug) und versuchen, diese Fragestellung mit einer Funktion zu beantworten. Gesucht ist eine neue, willkürlich festgesetzte Quote für den Sieg der Mannschaft A, die einerseits nicht auffällt (die Summe aller

Erwartungswerte für die drei Wettmöglichkeiten muss stimmen) und das finanzielle Risiko des Buchmachers, der über eine veränderte Quote heimlich mitwettet, auf 20000 Euro begrenzt.

Wie starten Sie diese Suche nach den richtigen Antworten? Sehen Sie gleich, was herauskommt oder nicht? Wir versetzen uns in die Rolle von Schülerinnen und Schülern, die nicht Mathematik studiert haben, aber bereit sind, sich auf eine Suche einzulassen. Gleich zu Beginn testen wir die nahe liegenden Vorschläge: Wir senken die Quote für den Sieg der Mannschaft A um einen Wert und erhöhen zum Ausgleich die Quote für den Sieg der Mannschaft B um diesen Wert zu verringern. Zur Erinnerung die Quoten vor der Manipulation:

Für Sieg Mannschaft A ist die Quote 5,4 (Gewinnerwartung 0,185185185)
für Sieg Mannschaft A ist die Quote 2,7 (Gewinnerwartung 0,37037037)
und
für Unentschieden ist die Quote 1,8 (Gewinnerwartung 0,555555556).

Die Summe der Gewinnerwartungen ist 1,111111 – diese Summe muss auch durch die veränderten Gewinnerwartungen erreicht werden.

Nun testen wir den Vorschlag, die Quote für den Sieg der Mannschaft A um einen Wert und erhöhen zum Ausgleich die Quote für den Sieg der Mannschaft B um diesen Wert. Zunächst nehmen wir einen Zahlenwert, etwa 2 oder 3. Dann halten wir die neuen Quoten und Gewinnerwartungen fest:

Für Sieg Mannschaft A ist die Quote 3,4 (Gewinnerwartung 0,294117647)
für Sieg Mannschaft A ist die Quote 5,7 (Gewinnerwartung 0,175438596)
und
für Unentschieden ist die Quote 1,8 (Gewinnerwartung 0,555555556).

Die Summe der Gewinnerwartungen ist 1,025111799 – das passt nicht. Wenn wir dieselbe Idee mit einer anderen Zahl (diesmal die drei) probieren, stimmt es auch nicht. Wir verwerfen diese Idee.

Wie steht es mit einem Faktor? Wir teilen die Quote für den Sieg der Mannschaft A um einen Wert (wieder 2) und erhöhen zum Ausgleich die Quote für den Sieg der Mannschaft B um diesen Faktor. Die Summe der Gewinnerwartungen ist in diesem Fall 1,111111 – wunderbar! Sind wir damit fertig? Ein (Gegen-)Beispiel, verstärkt durch ein zweites zeigt eindeutig, dass eine Idee NICHT richtig ist, aber auch viele Beispiele beweisen nicht, dass eine Idee stimmt. Unendlich viele ungerade Zahlen sind Primzahlen, aber nicht alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen.

Was nun? Versuchen wir erst einmal ein zweites Beispiel, wieder die drei als Faktor. Damit rechnen wir die folgenden Quoten und Gewinnerwartungen aus:

Für Sieg Mannschaft A ist die Quote 1,8 (Gewinnerwartung 0,555555556)
für Sieg Mannschaft A ist die Quote 8,1 (Gewinnerwartung 0,12345679)
und
für Unentschieden ist die Quote 1,8 (Gewinnerwartung 0,555555556).

Die Summe der Gewinnerwartungen ist 1,234567901– das passt nicht. Damit ist auch diese Idee widerlegt und wir müssen uns (weiter als neugierige Schülerinnen und Schüler) genauer überlegen, wie wir unser Ziel erreichen können. Wie hängt eine Verringerung der Quote für den Sieg der Mannschaft A mit einer Erhöhung der Quote für den Sieg der Mannschaft B so zusammen, dass die Summe der Gewinnerwartungen gleich bleibt?

Wir schreiben das als Gleichungen auf:
Summe der drei Gewinnerwartungen vorher = 1,111111 = Gewinnerwartung Sieg A + Gewinnerwartung Sieg B + Gewinnerwartung Unentschieden.

Summe der drei Gewinnerwartungen nachher = 1,111111 =

Gewinnerwartung (verringert) Sieg A + Gewinnerwartung (erhöht) Sieg B + Gewinnerwartung Unentschieden.

Wenn wir die beiden Gleichungen zusammenfassen, bleibt:

Gewinnerwartung Sieg A + Gewinnerwartung Sieg B = Gewinnerwartung (verringert) Sieg A + Gewinnerwartung (erhöht) Sieg B

Ist das schon eine Gleichung, die wir ausrechnen können? Wir versuchen es und haben gleich eine Frage dazu: Wie drücken wir in der Gleichung „verringert" und „erhöht" aus? Im ersten Anlauf schreiben wir Minus und Plus – wenn das nicht funktioniert, probieren wir wieder einen Faktor oder noch etwas anderes.

1/Quote A + 1/Quote B = 1/(Quote A – X) + 1/(Quote B + X)

Wenn wir diese Gleichung anschauen, sind wir nicht sicher, ob das richtig ist. Woher wissen wir, ob wir denselben Wert X von Quote A abziehen und zu Quote B addieren sollen? Wenn wir von Quote B einen anderen Wert Y abziehen, haben wir eine Gleichung mit zwei Ungekannten. Wie können wir diese Unbekannten finden?

Als Schülerinnen und Schüler würden wir jetzt selbstverständlich die konkreten und bekannten Werte einsetzen und versuchen, die Gleichung nach x aufzulösen, statt lange über die gestellten Fragen lange nachzudenken. Probieren wir doch einfach einmal, ob es so geht und wenn nicht – dann können wir vielleicht etwas daraus lernen.

$1/5{,}4 + 1/\ 2{,}7 = 1/(5{,}4 - x) + 1/(2{,}7 + x)$ (x wird sicher nicht 5,4, sonst wäre die neue Quote für A gleich Null – ein Fall, der in der Praxis nicht auftritt). Mit ein wenig Algebra finden wir eine viel einfachere äquivalente Gleichung: $x^2 - 2{,}7x = 0$ mit den Lösungen $x = 0$ und $x = 2{,}7$. Das leuchtet auf den ersten Blick ein (mit anderen Worten: wir hätten es auch direkt „sehen" können): Wenn wir die beiden Quoten um 2,7 ändern, vertauschen wir sie. Die Gewinnerwartung von A wird zu der von B und umgekehrt.

Wie wirkt sich das auf die Auszahlungen aus?

Sieg Mannschaft A: 27000 (Gewinn 33000)

Sieg Mannschaft B: 108000 (Verlust 48000)

Unentschieden: 54000 (Gewinn 6000)

Zwischenfazit: Wir haben als eifrige Schülerinnen und Schüler durch schrittweises Überlegen und Rechnen einen Weg gefunden, auf dem der Buchmacher im konkreten Fall die Quoten so ändern kann, dass er heimlich mitspielt ohne dass es jemand merkt (= anhand der Quoten nachrechnen kann). Aber er verliert maximal 48000 Euro, also deutlich mehr als er riskieren möchte.

Was nun?

Wir sehen zwei Möglichkeiten für den konkreten Fall: Wenn wir die Quotenänderung auf Sieg Mannschaft B und Unentschieden aufteilen, können wir den maximalen Verlust deutlich reduzieren. Wenn wir dabei bleiben, die Quoten von Sieg Mannschaft A und B zu ändern, müssen wir vom Ergebnis zurückrechnen: Bei welcher Quote für B ist der Verlust maximal 20000 Euro?

Welche Quote für A können wir dementsprechend oder dazu passend wählen? Wieder müssen wir Entscheidungen treffen: Welcher Frage gehen wir zuerst nach? Wie bei allen solchen Entscheidungen im Projektverlauf raten wir dringend dazu, die Schulklasse selbst solche Entscheidungen treffen zu lassen. Nur so lassen sich die Kompetenzen erwerben, die im Ziel „fürs Leben lernen“ zusammengefasst sind. Uns scheint an dieser Stelle der Versuch am interessantesten, von einem maximal möglichen Verlust von 20000 Euro auf passende Quoten für A und B zurückzuschließen. Auch hier wählen wir einen algebraischen Ansatz, wir versuchen passende Gleichungen aufzustellen.

Für welche Quote für das Ergebnis „Sieg Mannschaft B“ ist die fällige Auszahlung so hoch, dass 20000 Euro Verlust entstehen? Einsatz mal Quote = Auszahlung. Oder mit den vorliegenden Zahlen: $20000 * x = 80000$, also $x = 4$. Die Quote für das Ergebnis „Sieg Mannschaft B“ darf maximal auf 4 steigen. Wie ist die passende Quote für das eigentlich gewünschte Ereignis „Sieg Mannschaft A“? Wir hatten die Gleichung

1,111111 = Gewinnerwartung (verringert) Sieg A + Gewinnerwartung (erhöht) Sieg B + Gewinnerwartung Unentschieden

Und tragen dort die nun bekannten Größen ein:
1,111111 = x + 1/4 + 1/1,8
also x = 0,305555444.
Die passende Quote für „Sieg Mannschaft A“ ist demnach 3,27.

Fazit: Mit einiger Ausdauer haben sie Schülerinnen und Schüler der Sek I ihre Ziele erreicht. Sie wissen nun, wie ein Buchmacher heimlich mitwetten kann, wenn er die Quoten anders setzt als die Wettbeträge es nahe legen. Was aber passiert, wenn die veränderte Quote für B auf einmal noch zusätzliche Wetter anlockt? Dann steigt das Risiko für den Buchmacher ganz schnell, weil er ja im Fall vom (eigentlich wahrscheinlicheren) Sieg von Mannschaft B für die Verluste selbst aufkommen muss. Von dieser Einsicht ausgehend ist es nicht schwer zu erkennen, dass ein Buchmacher sehr froh ist, wenn er die Quoten so ansetzen kann, dass er unabhängig vom Spielausgang immer gewinnt, nämlich durch die Provision. Wenn er das erreicht, sagt man „Das Buch ist rund!“ – der Buchmacher kann gelassen abwarten, wie das Spiel tatsächlich ausgeht und verdient auf jeden Fall.

Selbstverständlich kann die Schulklasse (vielleicht mit etwas Ermutigung durch die Lehrperson) nun auch entscheiden, die offenen Fragen zur Verallgemeinerung durch die Suche nach passenden Formeln bzw. Funktionen zu beantworten. Wir lassen hier diese Fragen bewusst offen und gehen wir einen Schritt weiter, vom Totalisator zum üblichen Buchmacher. Wir formulieren als These, dass er offenbar ein Interesse hat, seine Quoten möglichst gut an die tatsächlichen Wetteinsätze anzupassen, damit er sein Risiko verringert. Zur Überprüfung dieser These haben wir eine Modellrechnung entwickelt, die wir Ihnen jetzt vorstellen wollen.

Die Angst des Buchmachers vorm Risiko

Wir haben bereits darauf hingewiesen, dass die meisten Wettangebote nicht von einem Buchmacher gemacht werden, der die Quoten erst ausrechnet, wenn alle Wetteinsätze gemacht sind, sondern von solchen, die laufend ihre aktuellen Quoten anbieten. Wer zu einem bestimmten Zeitpunkt eine Wette abschließt, muss vom Buchmacher zu der Quote ausbezahlt werden, die genau zu diesem Zeitpunkt angeboten wurde. Das kann für den Buchmacher riskant sein, wenn sich das Wettverhalten ändert und die Anfangsquoten nicht mehr auf den aktuellen Stand der Einzahlungen passen. In diesem Fall wettet er unfreiwillig mit oder trägt bewusst das Risiko. Wir gehen davon aus, dass er nicht mitwetten möchte und fragen uns, was er dagegen tun kann.

Gehen Sie nicht davon aus? Zweifeln Ihre Schülerinnen und Schüler? Dann versuchen wir Sie zunächst mit einem Beispiel zu überzeugen. Am 23.9.2014 wurden von BET3000 die folgenden Quoten für das Spiel Real Madrid gegen CF Elche angeboten. Tipp 1 (Sieg Madrid) 1,1; Tipp X (unentschieden): 14 und Tipp 2 (Sieg Elche): 45

Real Madrid hat am Wochenende vorher mit 8:2 einen Rekordauswärtssieg geschafft, Elche 0:2 zu Hause verloren. Offenbar war Real Madrid haushoher Favorit. Nehmen wir an, bei BET3000 wurden bisher insgesamt Wetten in der Höhe von 10.000.000 Euro auf dieses Spiel abgegeben. Nehmen wir weiter an, dass die hier gezeigten Quoten in etwa den tatsächlichen Einsätzen entsprechen:

Aufgabe: Welche Einsätze wurden unter diesen Annahmen bisher auf welchen Ausgang gemacht?

Schon wieder etwas Neues: Sie (bzw. Ihre Schülerinnen und Schüler) sollen aus der Summe der Einzahlungen zurückrechnen auf die Einsätze, die für die drei möglichen Ausgänge des Spieles gemacht wurden. Das finden die Schülerinnen und Schüler selbst heraus, oder?

Wir helfen! Wie immer schätzen wir vorab im Kopf, was ungefähr herauskommen wird. Der allergrößte Anteil der Einsätze geht auf den Sieg von Madrid, ein wenig auf Unentschieden und ganz wenig auf den Sieg von Elche. Zunächst bestimmen wir, wieviel Provision der Buchmacher nimmt.

Die Summe der Gewinnerwartungen ist 1/1,1 + 1/14 + 1/45 = 1,002741703 – ganz knapp über 1. Der Buchmacher hat seine Provision in diesem Fall fast auf null Prozent gesetzt, auf 0,27 Prozent (etwas über

27000 Euro sind nicht viel bei 10.000.000 Euro Umsatz). Wir vermuten aufgrund von Hinweisen in Texten über Quoten im Internet, dass der Buchmacher hier ganz bewusst die Quote für den Sieg von Madrid nicht unter 1,1 setzt, damit im Falle eines Sieges von Madrid überhaupt noch etwas ausgezahlt wird.

Wie verteilen sich nun die 10.000.000 – 27.000 = 9.973.000 Euro auf die drei Möglichkeiten? Wir erinnern uns an die Grundidee der Sportwette. An die Gewinner wird alles (minus Provision) ausbezahlt. Also kann mit dem Kehrwert der Quote die jeweilige Einzahlung direkt ausgerechnet werden. 9.973.000 * 1/1,1 = 9066363,64 Euro wurden auf den Sieg von Madrid gewettet, 9.973.000 * 1/14 = 712357,14 Euro auf Unentschieden und 221622,22 auf den Sieg von Elche (falls der Buchmacher wie ein Totalisator gerechnet hat). Die Summe der zurückgerechneten Wetteinsätze ist mit 10.000.343 ein wenig höher als 10 Millionen Euro. Wir nehmen an, dass (aus optischen Gründen?) die Quoten etwas gerundet wurden.

Eine kleine Modellvariation: Reaktion auf Unerwartetes

Nun beginnt unserer fiktives Szenario. Wir nehmen aus didaktischen Gründen einfach etwas ganz Ungewöhnliches an, um zu zeigen, welche Risiken ein Buchmacher eingehen kann, wenn er (aus welchen Gründen auch immer) mitwettet. Unsere Annahme ist eine Änderung der Gewinnerwartung: Im Laufe des Nachmittages vor dem Spiel verdichten sich die Gerüchte, dass beim gemeinsamen Mittagessen des gesamten Teams von Madrid etwas im Essen eine heftige Lebensmittelvergiftung ausgelöst hat – die meisten Spieler und Ersatzspieler müssen mit Blaulicht ins Krankenhaus und können am Abend nicht spielen (wirklich nur eine Modellannahme: tatsächlich hat Real Madrid 5:1 gewonnen). Vermutlich – so sagt die Gerüchtebörse - tritt eine Kombination aus Ersatzspielern und Jugendspielern an. Sobald dieses Gerücht im Internet die Runde macht (und später vom Krankenhaus bzw. den Nachrichtenagenturen bestätigt wird) ändern sich die Gewinnerwartungen der Wettenden drastisch. CF Elche hätte plötzlich sehr gute Chancen zu gewinnen. Mehr als 20.000.000 Euro werden (in unserem fiktiven Szenario) in kurzer Zeit auf Elche gesetzt. Der Buchmacher ändert seine Quote nicht und Elche gewinnt tatsächlich. Wie hoch sind die vom Buchmacher zu leistenden Auszahlungen? Das ist eine kleine Übung zum Rechnen mit großen Zahlen: 20.221.622,22 * 45 = 909.972.999,90 Euro. Wenn nur ein wenig mehr als 20.000.000 Millionen zusätzlich eingesetzt wird, zahlt der Buchmacher etwa eine Milliarde Euro an die Gewinner. Dabei trösten ihn auch die etwa 9.000.000 Euro nicht, die vorher auf Madrid gesetzt wurden und ihm nun bleiben.

Sind Sie überzeugt? Nun können wir wohl *gemeinsam* davon ausgehen, dass Buchmacher solche Risiken vermeiden wollen und danach trachten, nicht mit zu wetten. Wie können Buchmacher das erreichen? Haben Sie eine Idee? Wie bitte, den Spielausgang manipulieren? Ja, das scheint vorzukommen – wir gehen weiter unten darauf ein. Was aber sind die legalen Möglichkeiten? Dazu machen wir eine kleine Modellrechnung. Die großen finanziellen Verluste im letzten Beispiel sind dadurch entstanden, dass der Buchmacher seine Quoten nicht der geänderten Situation und den neuen Wetten angepasst hat. Also ist die Grundidee, dass der Buchmacher versucht, seine Quoten laufend den aktuellen und bisherigen Wetteinsätzen anzupassen, d.h. für den je aktuellen Stand wie ein Totalisator die Quoten nach bisherigem Eingang von Wetteinsätzen zu berechnen. Die allerersten Quoten wird er vorsichtig schätzen und dann wird er – was tun? Wie kann er seine Quoten laufend aktualisieren? Was meinen Sie?

Modellrechnungen zur Reaktion des Buchmachers

Wir modellieren verschiedene Vorgehensweisen. Dabei vereinfachen wir die Realität ein wenig, indem wir annehmen, dass jede Wette mit einem fixen Betrag (10 Euro) abgegeben wird. Tatsächlich werden Beträge von 1 Euro bis zum jeweiligen Limit gesetzt. Ohne unsere Vereinfachung brauchen wir also etwas Statistik, um letztlich zum selben Resultat zu kommen.

Damit wir nicht mit so großen Zahlen rechnen müssen, nehmen wir ein einfacheres Beispiel. Nach einer gewissen Zeit seien 10000 Euro gesetzt, die sich nach Abzug von 10% Provision auf die drei möglichen

Tipps wie folgt verteilen:

Sieg Mannschaft A:	3000 Euro (Quote 3,	Auszahlung 9000)
Sieg Mannschaft B:	5000 Euro (Quote 1,8	Auszahlung 9000)
Unentschieden:	1000 Euro (Quote 9	Auszahlung 9000)

Wir gehen also von einem Idealzustand aus. Bei jedem möglichen Spielausgang verdient der Buchmacher seine Provision, also 1000 Euro. Nun lassen wir in unser Modell zusätzlich 1000 Wetten eingehen. Worauf werden diese Wetten abgegeben? Das simulieren wir!

Im ersten Fall werden die neuen Wetten (insgesamt 10000 Euro) so abgegeben wie die bisherigen, d.h. insgesamt nach Abzug von 10% Provision zusätzlich 3000 Euro auf Sieg Mannschaft A, 5000 Euro auf Sieg Mannschaft B und 1000 Euro auf Unentschieden. Was muss der Buchmacher tun?

Nichts. Die Quoten bleiben, die Auszahlungen verdoppeln sich.

Nun testen wir mögliche Extremfälle: Alle dazukommenden Wetten konzentrieren sich auf eine Möglichkeit. Beginnen wir mit der ersten, einem Sieg von Mannschaft A. Was passiert? Berechnen Sie bitte die neuen Auszahlungen für den Fall, dass die Quoten nicht geändert werden. Was haben Sie ausgerechnet? Wir kommen zu folgendem Ergebnis:

Sieg Mannschaft A: 12000 Euro (Quote 3; Auszahlung 36000, Verlust 16000)
Sieg Mannschaft B: 5000 Euro (Quote 1,8; Auszahlung 9000, Gewinn 11000)
Unentschieden: 1000 Euro (Quote 9; Auszahlung 9000, Gewinn 11000)

Die Auszahlungen zeigen, dass in diesem Fall der Buchmacher mitwettet. Dementsprechend kann er je nach Spielausgang gewinnen oder verlieren. Nun rechnen wir aus, was passiert, wenn er nach je 100 eingegangenen Wetten die Quoten neu berechnet. Für die Auszahlungen müssen wir noch beachten, dass „die Wette gilt“, also zu der Quote ausgezahlt werden muss, zu der die Wette angenommen wurde. Wir müssen also je nach Wettzeitpunkt verschiedene Auszahlungen berechnen bzw.

letztlich summieren. Dazu schreiben wir alles in eine Tabelle. Wir beginnen mit den Ausgangswerten:

Summe aller Wetteinsätze	10000
Provision	1000
Einsatz auf Sieg Mannschaft A	3000
Einsatz auf Sieg Mannschaft B	5000
Einsatz auf Unentschieden	1000
Summe der Einsätze	9000

	Quote	**Auszahlungen**	**Fazit**
Sieg Mannschaft A	3	9000,00	1000,00
Sieg Mannschaft B	1,8	9000,00	1000,00
Unentschieden	9	9000,00	1000,00

Nun werden insgesamt 1000 Euro zusätzlich auf Mannschaft A gesetzt. Wir ergänzen die erste Tabelle:

100 zusätzliche Wetten auf A	1000
Summe aller Wetteinsätze	11000
Provision	1100
Einsatz auf Sieg Mannschaft A	3900
Einsatz auf Sieg Mannschaft B	5000
Einsatz auf Unentschieden	1000
Summe der Einsätze	9900

	Quote	**Auszahlungen**	**Fazit**
Sieg Mannschaft A	2,5384	9900,00	11,0000
Sieg Mannschaft B	1,98	9900,00	1100,00
Unentschieden	9,9	9900,00	1100,00

Fällt an dieser Stelle etwas auf? Wenn die bis zur zusätzlichen Einzahlung eingegangen Wetten nach der alten Quote ausbezahlt werden, kann das Buch nicht so schön rund sein, dass unabhängig vom

Spielergebnis jeweils genau die Provision von 10% als Fazit bleibt. Wo steckt also der Fehler? Haben Sie den Fehler auch gefunden? Haben Ihre Schülerinnen und Schüler auch diesen Fehler gemacht?

Wir haben die Quoten und Auszahlungen so berechnet, als ob sie nach der Annahme aller Wetten neu ausgerechnet werden. Das ist aber nicht der Fall. Wir haben uns vorgenommen: „Nun rechnen wir aus, was passiert, wenn er nach je 100 eingegangenen Wetten die Quoten neu berechnet.“ Für die ersten 100 zusätzlichen Wetten ändert sich die Auszahlungsquote also nicht. Erst ab der 101ersten zusätzlichen Wette gelten die neuen Quoten, die wir mit der Tabelle ausgerechnet haben (gerundet: 2,5; 2; 10). Wir berichtigen die Tabelle:

	Quote	**Auszahlungen**	**Fazit**
Sieg Mannschaft A	3	11700,00	-700,00
Sieg Mannschaft B	1,8	9000,00	2000,00
Unentschieden	9	9000,00	2000,00

Wenn wir die Ergebnisse anschauen, sehen wir schon eine Tendenz, die wir am eingangs bei der Vorstellung des Extrembeispiels als abschreckendes Beispiel gezeigt haben. Der Buchmacher wettet mit. Nun schreiben wir nicht jede einzelne Zwischenrechnung auf, sondern listen nur die Ergebnisse.

Quotenänderung nach je 100 Einsätzen

	Ausgangszustand: Summe der Wetteinsätze auf		
	Sieg Mannschaft A	Sieg Mannschaft B	Unentschieden
	3000	5000	1000
Auszahlung	9000	9000	9000
Fazit	1000	1000	1000
1000 dazu	3900	5000	1000
Auszahlung	11700	9000	9000
Fazit	-700	2000	2000
2000 dazu	4800	5000	1000

Auszahlung	14238,46	9000	9000
Fazit	-2238,46	3000	3000
3000 dazu	5700	5000	1000
Auszahlung	16488,46	9000	9000
Fazit	-3488,46	4000	4000
4000 dazu	6600	5000	1000
Auszahlung	18541,09	9000	9000
Fazit	-4541,09	5000	5000
5000 dazu	7500	5000	1000
Auszahlung	20450,18	9000	9000
Fazit	-5450,18	6000	6000
6000 dazu	8400	5000	1000
Auszahlung	22250,18	9000	9000
Fazit	-6250,18	7000	7000
7000 dazu	9300	5000	1000
Auszahlung	23964,47	9000	9000
Fazit	-6964,47	8000	8000
8000 dazu	10200	5000	1000
Auszahlung	25609,63	9000	9000
Fazit	-7609,63	9000	9000
9000 dazu	11100	5000	1000
Auszahlung	27197,87	9000	9000
Fazit	-8197,87	10000	10000
10000 dazu	12000	5000	1000
Auszahlung	28738,41	9000	9000
Fazit	-8738,41	11000	11000

All die Zahlen richtig einzusetzen, ist schon etwas mühsam. Spätestens dann, wenn Sie die Schulklasse ersuchen, als Hausaufgabe nachzurechnen und in eine Tabelle einzutragen, wie die Werte sich entwickeln, wenn alle 10 Wetten oder gar pro Wette neue Quoten berechnet und angewendet werden, ist das so viel Mühe, dass sich die Frage stellt, ob es sich nicht lohnt, erst mehr Mathematik zu überlegen (eine Formel!) und dann die Tabelle automatisch ausrechnen zu lassen.

Wenn wir die Ergebnisse interpretieren, die in der Tabelle zusammengetragen sind, fällt uns auf, dass der Buchmacher trotz der Quotenänderungen unfreiwillig mit wettet. Er kann fast 9000 Euro verlieren – und bei Spielen mit höherem Umsatz entsprechend mehr. Immerhin hat er sein Risiko gegenüber dem Fall verringert, in dem er die Quoten einfach beibehält. Wie oben ausgerechnet könnte in diesem Fall der Verlust 16000 Euro betragen. Ändern nach ja 100 Wetten oder je 1000 Euro zusätzlichen Wetteinsätzen halbiert das Risiko fast. Nun liegt der Schluss nahe, dass schnellere Änderungen den Verlust weiter verringern.

Um diese Vermutung zu überprüfen, müssen wir entweder sehr fleißig sein oder etwas Mathematik investieren. Mathematik ist ja wie oft im Studium gehört im wesentlich eine Erfindung fauler Leute, die lieber denken als rechnen. Im Studium würde an dieser Stelle die fertige Formel aufgeschrieben („Wie man leicht sieht, gilt…“) und mit Zusatz „Beweis trivial“ versehen. Wir wollen aber nicht den gleichen Weg gehen, d. h. sehr viel Mathematik möglichst kompakt für Studierende aufschreiben, sondern mit Ihnen gemeinsam überlegen, wie Schülerinnen und Schüler hier selbstständig weiter arbeiten können. Was würden Sie Ihren Schülerinnen und Schüler als erstes raten, falls Sie um Rat gebeten werden?

Wir raten dazu, zunächst einmal ganz genau aufzuschreiben, was wir eigentlich wollen und was wir bereits wissen. Schön wäre eine Tabelle, in die wir nun den jeweils neuen Wettbetrag eintragen müssen, damit das Programm die Provision, die neuen Quoten, die zu erwartenden Auszahlungen und das finanzielle Fazit für die drei möglichen Spielausgänge einträgt.

Wir wissen, wie sich die Provision ausrechnen lässt, können aus gegebenen Einsätzen die Quoten berechnen und mit den Quoten die zu erwartenden Auszahlungen, die wir dann mit den Einnahmen vergleichen können, um ein finanzielles Fazit zu erstellen.

Quotenänderung pro Einsatz						
Bitte eintragen:						
Summe der Einsätze	10000					
gewünschte Provision	10					
Ausgangslage		**Quoten**	**Auszahl -ungen**	**Fazit**		
Einsätze Tipp A	3000	3	9000	1000		
Einsätze Tipp B	5000	1,8	9000	1000		
Einsätze Tipp X	1000	9	9000	1000		
Neu-berechnung		**Provi-sion**	**Summe neu**	**Quoten neu**	**Auszahl-ung**	**Fazit**
Einsatz auf Tipp A	10	1	3009	2,99	9027	983
Einsatz auf Tipp B	0	0	5000	1,80	9000	1009
Einsatz auf Tipp X	0	0	1000	9,01	9000	1009
Neu-berechnung		**Provi-sion**	**Summe neu**	**Quoten neu**	**Auszahl -ung**	**Fazit**
Einsatz auf Tipp A	10	1	3018	2,99	9053,95	956,05
Einsatz auf Tipp B	0	0	5000	1,80	9000	1018
Einsatz auf Tipp X	0	0	1000	9,02	9000	1018

Wir haben begonnen, die Ausgangswerte und Formeln für die

Änderungen in eine Tabelle einzutragen. Wenn wir die Werte in der Tabelle betrachten, scheinen sie uns passend und plausibel, aber die Tabelle selbst wird viel zu groß, wenn wir sie bis zur einhundertsten Einzahlung fortsetzen. Was tun? Haben Sie eine Idee?

Die für unsere Ausgangsfrage entscheidenden Informationen sind die Auszahlung für Tipp A und das daraus resultierende finanzielle Fazit für den Fall, dass Mannschaft A gewinnt. Wir berechnen in der oben angeführten Tabelle die Auszahlung, indem wir die alte Auszahlung vergrößern um das Produkt aus vorletzter Quote und letzter Einzahlung (die letzte Wette wird ja nach der zuletzt ausgerechneten Quote angenommen). Das Fazit setzt sich zusammen aus Summe aller bisherigen Einzahlungen inklusive Provision minus der soeben ausgerechneten Auszahlung für Tipp A. Aus den beiden ersten Werten lässt sich ahnen, dass der Buchmacher ungern sieht, wenn ab einem bestimmten Zeitpunkt ganz einseitig nur noch auf einen Tipp gewettet wird. Trotz der schnellen Reaktion (Quotenänderung) schmälert das seinen Gewinn, wenn dieser Tipp sich als richtig erweist.

Wir investieren noch ein wenig mehr Mathematik und Konzentration, um die Tabelle leichter lesbar zu machen, indem wir uns auf drei sichtbare Werte beschränken: Nummer der Einzahlung, Auszahlung und Fazit. Die Tabelle sieht dann so aus:

		Auszahlung Tipp A	**Fazit**
Nummer der zusätzlichen Einzahlung	1	9027,00	983,00
	2	9053,95	966,05
	3	9080,84	949,16
	4	9107,68	932,32
	5	9134,46	915,54
	6	9161,20	898,80
	7	9187,88	882,12
	8	9214,51	865,49
	9	9241,09	848,91

…

95	11361,55	-411,55
96	11384,56	-424,56
97	11407,53	-437,53
98	11430,48	-450,48
99	11453,39	-463,39
100	11476,26	-476,26
…		
996	26270,49	-6310,49
997	26284,00	-6314,00
998	26297,51	-6317,51
999	26311,02	-6321,02
1000	26324,52	-6324,52

Vergleichen wir die Werte für 100 bzw. 1000 zusätzliche Einzahlungen (Wetten auf Tipp A) mit der Reaktion „nach 100 Wetten die Quote ändern“ so zeigt sich, dass die laufende Änderung die Verluste vermindern, aber nicht verhindern kann.

Wir fassen die Vergleichswerte in einer Übersichtstabelle zusammen:

	Auszahlung Tipp A nach 100 Wetten	Fazit	Auszahlung Tipp A nach 1000 Wetten	Fazit
Quote konstant	11700,00	-700,00	36000,00	-16000,00
Änderung nach je 100 Wetten	11700,00	-700,00	28738,41	-8738,41
Änderung nach jeder Wette	11476,26	-476,26	26324,52	-6324,52

Nun haben wir uns über einige Zeit mit der Angst des Buchmachers vorm Risiko beschäftigt. Der Grund dafür ist selbstverständlich nicht unser Mitleid mit diesem Berufsstand, wir haben ein hoffentlich interessantes Beispiel gesucht, um den Prozess des Modellierens darzulegen. Wenn Sie sich aktiv beteiligt haben, konnten Sie besser als nur durch Mitlesen mitvollziehen, wie sich eine Fragestellung entwickelt, wie neue Aspekte hinzukommen und Antworten gefunden werden, die zu neuen Fragen führen. In diesem Fall haben wir ein deutliches Ergebnis: Die Mühe lohnt. Wer als Buchmacher ein kleines Programm mitlaufen lässt, dass die Quoten laufend dem aktuellen Stand der eingehenden Wetten anpasst, kann in extremen Fällen (alle Einsätze konzentrieren sich auf einen Tipp) die Verluste deutlich mindern und im normalen Fall das Buch fast rund halten, also in Ruhe Provision kassieren, egal wie das Spiel ausgeht.

Zusätzliche Modellannahmen und Simulationen

Nachdem Sie sich in diesem Kapitel des Buches schon so intensiv mit dem Beispiel Sportwetten beschäftigt haben, fallen Ihnen (bzw. in einer diesen Abschnitt des Mathematikunterrichts zum Thema abschließenden Reflexion Ihren Schülerinnen und Schülern) vielleicht noch andere Situationen ein, in denen es für einen Buchmacher riskant werden kann, selbst wenn er laufend seine Quoten aktualisiert. Uns sind noch folgende zwei Typen von besonderen Risiko eingefallen:

a) **Der Favoritensieg.**
Z. B. ist Mannschaft A haushoher Favorit, alle Wetter setzen ihr Geld auf A, niemand wettet auf B oder unentschieden (X). Wenn der Buchmacher mit einer bestimmten Quote, etwa mit vorsichtigen 1,5 für Sieg A gestartet ist, nimmt er bei 10 eingegangen Wetten auf A 100 Euro ein und zahlt 150 Euro aus (Verlust 50 Euro). Der Totalisator hingegen zieht von den 100 Euro Einnahmen seine 10 Prozent Provision ab (10 Euro sind sein Verdienst) und errechnet als Quote 0,9. Wer richtig gewettet hat und gewinnt, erhält also für seine 10 Euro genau 9 Euro zurück. Das wird jeden begeistern, der wettet!

b) Die Startquote ist sehr daneben und es wird wenig gewettet.
Die allererste Quote, zu der ein Buchmacher Wetten anbietet, kann offenbar nicht aufgrund bisher eingezahlter Wetten kalkuliert werden, weil ja noch nichts eingezahlt wurde. In der Praxis greift der Buchmacher hier auf Erfahrungen zurück: Wie waren die Quoten für dieses Spiel beim letzten Mal? Wer ist nach Einschätzung von Fachleuten diesmal wie hoher Favorit? Heimmannschaften spielen besser – etc. Einmal eingegangene und angenommene Wetten müssen mit der zu diesem Zeitpunkt ausgewiesenen Quote bezahlt werden, wenn sie gewonnen werden. Nehmen wir an, ein Buchmacher startet mit den Quoten aus dem ersten Beispiel (2, 3,33 und 5). Zwei Personen wetten zusätzlich je 10.000 Euro auf Mannschaft B und je eine Person mit jeweils 10.000 Euro auf Remis und Mannschaft A. Sonst wettet niemand. Dann stimmen die Quoten offenbar nicht.

Wenn A gewinnt, werden von den zusätzlichen Wetten 20.000 Euro ausbezahlt und 20.000 eingenommen – fein für den Buchmacher. Wenn die Partie unentschieden endet, werden 33.333 Euro ausgezahlt und 6.667 Euro bleiben beim Buchmacher. Wenn Mannschaft B gewinnt, sieht es böse aus: Zweimal 50.000 Euro sind auszuzahlen, also muss der Buchmacher 60.000 Euro zusetzen.

Didaktische Überlegungen zur Entwicklung des Themas Sportwetten im Unterricht

Wie lässt sich Mathematikunterricht zu diesem Thema für Schülerinnen und Schüler spannend und motivierend gestalten? Wir haben vor einigen Jahren einen Vorschlag dazu entwickelt (Siller & Maaß, 2009) und inzwischen mehrfach erprobt, den wir Ihnen jetzt vorstellen. Dazu noch zwei Vorbemerkungen. Obwohl das Thema Sportwetten gerade im Zusammenhang mit großen Fußballereignissen (vgl. auch Siller u.a. 2015) und dem Verdacht auf manipulierte Spiele immer wieder in den Medien thematisiert wird, ist es nicht automatisch schon deshalb ein motivierendes Thema für den Mathematikunterricht. Viel besser als eine motivierende Erläuterung der Lehrperson wirkt hier eine Eigenaktivität. Deshalb schlagen wir eine Simulation eines Sportturniers samt Einrichtung eines Wettbüros vor, in dem mit Spielgeld auf den Ausgang gewettet werden kann. In diesem Zusammenhang ist auch leichter möglich einzusehen, weshalb Quoten nicht einfach ausgewürfelt werden können. Quoten spiegeln Erwartungen von Wettenden auf den Ausgang wieder, die sich von der Erwartungswerten eines Zufallsgenerators unterscheiden. Auch wenn wir beim Würfeln oder Kartenspiel sehr intensiv auf einen bestimmte Zahl oder Karte hoffen, bleibt der Zufallsgenerator davon unbeeindruckt (jedenfalls dann, wenn es ein richtiger Zufallsgenerator ist und nicht gemogelt wird). Unsere Hoffnungen beeinflussen aber – sogar gewollt, wie wir bei den Modellrechnungen zum Verhalten des Buchmachers gesehen haben) die Quoten. Selbst wenn es „objektiv“ sehr unwahrscheinlich ist, dass im oben erwähnten Beispiel Elche gegen Madrid gewinnt, wird die Quote von Elche sich der 1 annähern und die von Madrid immer größer werden, wenn die allermeisten Wettenden auf einen Sieg von Elche tippen und fast niemand auf Madrid setzt. Die Schülerinnen und Schüler sollen an diesem Beispiel lernen, dass wir zur Erläuterung der Quoten zwar von Gewinnerwartungen sprechen, diese aber subjektiv gebildet werden, durch die persönliche Erwartung der Menschen, die Wetten eingehen.

Schülerinnen und Schüler aller Altersstufen sind immer hoch erfreut, wenn Experimente oder andere sinnvolle „Spielereien“ Farbe in den „grauen“ Schulalltag bringt. Leider gibt es solche Farbe im Mathematikunterricht noch immer viel zu wenig. Dem soll die Grundidee der hier vorgeschlagenen Unterrichtseinheit abhelfen: eine Sportsimulation wird mit Sportwetten verbunden. Zunächst sollten sich die Schülerinnen und Schüler noch überlegen, wie sie ein beliebiges Spiel, welches sich zum Wetten eignet, im Unterricht umsetzen können. Unser Vorschlag dazu ist Fußball. In der Schule ist es allerdings nicht sehr leicht umsetzbar, wenn mehrere Gruppen von Schülerinnen und Schüler Mannschaften bilden Fußballspiele live durchführen will, um zu ermitteln, welche Mannschaft die bessere ist, und ob es sich lohnt, einen entsprechenden Wetteinsatz zu tätigen. Das Hauptumsetzungsproblem liegt in der Spieldauer der einzelnen Spiele und der Schwierigkeit, ohne Probespiele die Mannschaften vorab gut einzuschätzen. Schulklassenintern gebildete Mannschaften haben ja keine ganze Saison Spielpraxis und eine Reihe von Spielergebnissen, aus denen so etwas wie eine Favoritenrolle ersichtlich wird.

Wir schlagen Tischelfmeter als Sportsimulation vor. Dazu brauchen die Schülerinnen und Schüler nur eine gewisse „Fingerfertigkeit“ und den Verschluss einer PET-Flasche als Ball. Auf einem Tisch werden 2 Tore (durch Stifte, Bücher o.ä.) aufgestellt. Abwechselnd versuchen nun zwei Spieler(innen) als „Elfmeterschützen“ mit einem Fingerschnipsen den Verschluss von ihrem Tor ins andere Tor zu befördern. Es gibt keinen Torwart, der Erfolg hängt nur davon ab, ob Richtung und Geschwindigkeit stimmen. Gespielt wird nach den Regeln für ein Elfmeterschießen nach einem Pokalspiel, das nach Ende der regulären Spielzeit und nach der Verlängerung unentschieden steht: Jede Mannschaft (in dieser Simulation also jeder Elfmeterschütze) hat 5 Versuche. Ist die Anzahl der Treffen danach gleich, wird solange noch für beide Schützen je ein Versuch hinzugegeben, bis eine Entscheidung fällt (also einer trifft und der andere bzw. die andere nicht). Es gibt deshalb immer eine(n) Gewinner(in), kein Unentschieden – das vereinfacht die folgenden Berechnungen. In einem späteren Durchgang kann diese Spielregel geändert werden, um realitätsnäher zu simulieren. Mit ein wenig Testen lässt sich für die Situation in der jeweiligen Schulklasse feststellen, ob z.B. 10 cm oder 15 cm Tor-breite günstig sind und der Abstand zwischen den Toren eine Tischlänge oder zwei Tischlängen betragen soll. Bei zwei Längen kommt es wesentlich darauf, ob die beiden Tische glatt nebeneinander stehen – ein Höhenunterschied bedeutet zusätzliche Erschwernisse für die Torschützen.

Abbildung 17: Der Ball ist im Tor: Tooooor!

Probedurchlauf

Nun führt die Lehrkraft einen Test für das geplante Turnier und die Wetten dazu durch. Zwei Freiwillige treten als Elfmeterschützen an, ein Wettbüro wird eingerichtet. Die beiden Freiweilligen machen ein öffentliches Training, das in 10 Probeschüssen endet. Festgehalten wird, wie oft die beiden dabei treffen, etwa Schüler A trifft 5mal und Schülerin B 7mal. Nun nimmt ein Wettbüro die Arbeit auf: Alle Schülerinnen und Schüler – außer den beiden Elfmeterschützen, die wegen der Gefahr der Wettmanipulation nicht selbst wetten dürfen, geben eine Wette ab. Zur Vereinfachung der Berechnungen ist es günstig, wenn alle Schülerinnen und Schüler genau 10 Einheiten Spielgeld setzen. Nehmen wir an, die Schulklasse hat 32 Schülerinnen und Schüler, so werden 30 Wetten mit insgesamt 300 Einheiten Spielgeld gesetzt. Auf wen? Die Schüler(innen) können nach Sympathie oder Kalkül setzen, zufällig oder kühl rechnend. Die Lehrperson sollte darauf keinen Einfluss nehmen, sondern nur in einer

Liste notieren (lassen), wer auf wen gesetzt hat.

Nun ahnen Sie sicher schon, wie es im Unterricht weiter gehen kann: Sobald die Einsätze getätigt wurden und das Spiel stattgefunden hat, sollen die simulierten Buchmacher an diejenigen, die richtig getippt haben, den Gewinn auszahlen. Wer bekommt wie viel Spielgeld? Am diesem einfachen Beispiel können die Schülerinnen und Schüler vielleicht sogar selbst erfinden, was Quoten sind und wie sie berechnet werden. Sobald die Grundlagen gelegt sind, können je nach Unterrichtsverlauf auch komplizierte Situationen (wie etwa die ausgeführten) erarbeitet und verstanden werden.

Wir gehen jetzt einen Schritt weiter und thematisieren eine der Schattenseiten der Sportwetten, den Wettbetrug. Neben zumindest für uns interessanten Möglichkeiten zur mathematischen Modellierung bietet dieses Thema aus unserer Sicht neben den Gefahren der Spielsucht einen weiteren guten Grund, sich nicht am Glücksspiel zu beteiligen. Kriminelle mischen kräftig mit, harmlose Menschen, die Wetten eingehen, werden um ihr Geld betrogen, weil der Ausgang der Sportereignisse durch Manipulation beeinflusst und nicht sportlich fair entschieden wird.

Projekt 2: Wettbetrug als Thema mathematischer Modellierungen und als Warnung für die Lernenden

Betrug bei Wettspielen scheint, wenn wir entsprechende Dokumentationen (http://www.pokerolymp.com/articles/show/news/13949/wettbetrug-beim-fu%C3%9Fball-spannende-doku-in-der-ard#.UsqBN7Sp6SF - letzter Zugriff 06.01.2014, ARD Sendung am 14.10.2013: „Im Griff der Zockermafia“) bzw. einschlägiger Literatur (vgl. Best, 2013) Glauben schenken, ein sehr einträgliches Geschäft zu sein. Daher ist es auch nicht weiter verwunderlich, dass sich hier eine regelrechter „Geschäftszweig“ ausgebildet hat, in dem versucht wird, insbesondere unwichtige Spiele aus den unteren Ligen bis hin zu Jugendliga zu manipulieren um selbst ein Geschäft zu machen. Manchmal wagen sich Wettbetrüger aber auch in „höhere Ligen“, um dort ihr Glück zu versuchen. So wurde am letzten Spieltag der Saison 2011/12 hatte der spätere österreichische Meister

„Sturm Graz“ ein Heimspiel gegen „Wiener Neustadt“, das er durch einen Hand-Elfmeter kurz vor Spielschluss knapp gewonnen hat. (vgl. Hell & Kellhofer, 2011) Nicht nur das Ereignis, sondern auch eine auffällige Struktur der Wetten führte zu dem Verdacht, dass der Ausgang des Spiels manipuliert worden sei. (vgl. Hell & Kellhofer, 2011).

Diese oder eine ähnlich geartete Tatsache, wie sie in letzter Zeit von den Medien immer wieder berichtet wird, kann gut als Einstieg in die Problematik dienen. Dabei zeigt sich vor allem - um ein Ergebnis bereits vorwegzunehmen - deutlich, dass sich solche Betrügereien für die Sportler nicht wirklich bezahlt machen, sondern meist nichts als eine Menge Ärger bis zum drohenden Karriereende mit sich bringen. Um uns ein wenig von den doch recht aktuellen Ereignissen rund um das Thema Wettbetrug abzuheben, arbeiten wir nachfolgend mit fiktiven, von uns erfundenen Daten, welche die Ergebnisse sehr gut widerspiegeln, aber nichts im tagesaktuellen Medienberichten gemeinsam haben.

Bevor wir unsere Ideen zum Thema Wettbetrug ausführen, laden wir Sie wiederum zur Mitarbeit, zum aktiven Lesen ein. Wie würden Sie eine Unterrichtssequenz zum Thema Wettbetrug beginnen? Wir schlagen vor, auch hier mit der Motivation zu starten und zu diesem Zweck in den Medien einen aktuellen Bezug zu suchen. Nun sind die aktuellen Ereignisse, auf die wir oben einleitend hingewiesen haben, jetzt (im Sommer 2014) aktuell. Wir wissen nicht, in welchem Jahr Sie Ihren Unterricht durchführen wollen, gehen aber von zwei Punkten aus. Einerseits sind die Ereignisse aus dem Sommer 2014 für Sie schon (lange vergangene) Geschichte und andererseits gibt es mittlerweile (leider) neue und aktuelle Ereignisse aus dem Bereich Wettbetrug. Wie fast immer besteht die erste Aufgabe zur Unterrichtsvorbereitung oder zum Unterrichtsbeginn eines realitätsbezogenen Mathematikunterrichts darin, einen **aktuellen** Bezug zu suchen und seine Relevanz für die Schülerinnen und Schüler am besten gemeinsam mit ihnen herauszuarbeiten. „**Objektive**“ Relevanz reicht nicht zur Motivation, **subjektive** Einsicht in die Relevanz ist zentral.

Bevor Sie sich im Unterricht auf die neuen Aspekte des Themas Wetten konzentrieren können, die aus der Frage nach dem besseren

Verständnis von Wettbetrug entstehen, müssen Sie die Grundidee der Wetten, Quoten, Provisionen etc. entweder wiederholen (wenn Sie das Thema wie zu Beginn des Kapitels vorgeschlagen bereits einmal behandelt haben und nun aus gegebenem Anlass darauf zurückkommen) oder etwas ausführlicher als bei der Wiederholung neu einführen. Wir verzichten hier auf diesen Teil und verweisen auf die Erläuterungen oben.

Haben Ihre Schülerinnen und Schüler nun schon so viel Erfahrung mit realitätsbezogenem Unterricht, dass sie eigenständig planen können, wie sie das Thema behandeln wollen? Es ist gar nicht schwer, auf die Idee zu kommen, dass mehr und genauere Daten nützlich sind. Welche Daten? Uns scheinen folgende Informationen wichtig:

- Wetteinsatz insgesamt
- Wetteinsatz vor der vermuteten Manipulation

So wird es möglich mit diesen Daten die

- Quoten vorher
- Quoten des Totalisators
- Situation für Totalisator/Buchmacher mit Quoten vorher und den veränderten Quoten

zu berechnen bzw. zu vergleichen. Da diese Vorgänge in der Regel simuliert werden (müssen), ist an dieser Stelle wieder die Verwendung einer Tabellenkalkulation oder einer vergleichbaren Technologie von Vorteil, sodass Schülerinnen und Schüler relativ mühelos mathematische Ergebnisse erhalten, die sie entsprechend reflektieren können, um sie mit den gefundenen Daten validieren zu können (vgl. Tabelle 1). Hier kann der Technologieeinsatz wiederum etwas dazu beitragen, den Schwerpunkt des Mathematikunterrichts vom Ausrechnen weg und hin zur Mathematik selbst zu bewegen!

Wettmanipulation an einem Beispiel					
Ausgangslage			*Auszahlung pro*	*Provision*	*reale Auszahlung*
gesetzt auf		**Quoten**	**100 Euro**	**10%**	**pro 100 Euro**
Team A	60000	1,5	150	15	135
Unentschieden	20000	4,5	450	45	405
Team B	10000	9	900	90	810

Abbildung 18: Tabelle 1 zum Wettbetrug

Betrachten wir die Simulation in Tabelle 1. Folgende Ausgangssituation wurde zugrunde gelegt: Der Gesamteinsatz beträgt 90000 Euro, die Verteilung der Geldbeträge auf Sieg, Unentschieden, Niederlage lautet wie folgt: 60000 – 20000 – 10000, womit sich wie im ersten Projektvorschlag dargestellt die Quoten für Sieg, Unentschieden, Niederlage als 1,5 – 4,5 – 9 errechnen lassen. Somit kann pro Hundert Euro eine Auszahlung von 135 – 405 – 810 Euro für Sieg – Unentschieden - Niederlage erwartet werden. Der Vorteil dieser Darstellung ist offensichtlich: pro Hundert Euro erlaubt es sich rasch einen Eindruck vom zu erwartenden Gewinn zu machen und überschlagsartig den Gewinn zu kalkulieren. Dies erlaubt auch bei der Verwendung „krummer Zahlen“ recht schnell zu diskussionswürdigen Ergebnissen zu gelangen.

Nun manipulieren wir das Spiel und nehmen an, dass ein Spieler „gekauft“ wird – sagen wir, der Torwart wird bestochen. Zugleich nehmen wir an, dass derjenige, welcher das Spiel manipuliert, auch verdienen möchte und deswegen 90000 Euro zusätzlich auf Team B setzt. Dies ist naheliegend, da durch den „Kauf“ des Torwarts von Team A zu erwarten ist, dass der Ball leichter in dieses Netz gelangen wird. Ermitteln wir die neuen Quoten wie beim Totalisator, ergeben sich folgende Zahlen für die jeweiligen Quoten:

- 180000/60000 = 3 für Sieg von Team A
- 180000/20000 = 9 für Unentschieden
- 180000/100000 = 1,8 für Sieg von Team B

Die Auszahlung pro Hundert Euro Einsatz, bei der die 10% Provision bereits berücksichtigt sind, sieht dann wie folgt aus:

- Sieg Team A: 270 Euro
- Unentschieden: 810 Euro
- Sieg Team B: 162 Euro

Die Quote für das Team B sinkt drastisch, von 9 auf 1,8, während jene von Team A steigt (von 1,5 auf 3). Das ist eigentlich zur Manipulation kontraproduktiv, weil der Gewinn sinkt. Dies wird bei Spielmanipulationen aber immer so sein, da der eigene hohe Einsatz die Quote drückt. Derjenige, der das Spiel manipulieren möchte, kann mit einem Gewinn in Höhe von 55800 Euro = 90000 * 1,62 – 90000 rechnen. Das ist im Vergleich zum Einsatz ein großer Betrag - aus unserer Sicht: 55800 Euro oder 62% Gewinn für wenig Arbeit(szeit). Dies ist umso berücksichtigenswerter, als die hier verwendeten Zahlen ein Bruchteil der echten Wettumsätze sind, welche insgesamt im Milliardenbereich liegen.

Diese Überlegungen sind jetzt aber auch mit anderen Zahlenwerten in ähnlicher Weise möglich und können – wie oben bereits erwähnt – mit Hilfe einer technologischen Unterstützung einfach und unkompliziert erfolgen (vgl. Tabelle 2):

Einzahlung des Manipulators			Reale Auszahlung für den Manipulator bei Sieg Team B		
1000			*7445,454545*		
veränderte Situation					
Ausgangslage			*Auszahlung pro*	*Provision*	*reale Auszahlung*
gesetzt auf		**Quoten**	**100 Euro**	**10%**	**pro 100 Euro**
Team A	60000	1,516667	151,6666667	15,16666667	136,5
Unentschieden	20000	4,55	455	45,5	409,5
Team B	11000	8,272727	827,2727273	82,72727273	744,5454545

Abbildung 19: Tabelle 2 zum Wettbetrug

In der Tat scheint es zunächst so, als ob eine solch einfache Manipulation eines Spiels gar nicht stattfinden könnte. In der oben erwähnten Dokumentation in der ARD wurde jedoch genau auf solche Vorgänge hingewiesen; die Manipulationen, welche tatsächlich stattfinden, sind jene, welche am schwierigsten nachzuvollziehen sind. In den unteren Ligen läuft keine Kamera, die öffentliche Aufmerksamkeit ist gering und die Spieler sind leichter (für weniger Geld) käuflich.

Wir möchten nun, wie im Zuge der Untersuchung des Wetteinsatzes durch nachträgliche Quotenänderung versprochen, an einem weiteren Beispiel zeigen, wie sich aus einer realitätsnahen Fragestellung eine interessante mathematische Fragestellung ergeben kann, die sogar so weit vertieft werden kann, dass sie sich von der realen Ausgangssituation löst. Uns ist – ebenso wie Ihnen und den Schülerinnen und Schülern – aufgefallen, dass der Gewinn durch die Manipulation eines Spieles nicht beliebig zu steigern ist. Wenn die Quoten den veränderten Höhen aller Einsätze angepasst werden und eine Provision abgezogen wird, kann es vielleicht sogar sein, dass sehr hohe Einsätze durch den Gangster sich gar nicht lohnen. Wir nutzen die vorhandene Modellierung in der Tabellenkalkulation, um ein paar Testwerte zu erhalten.

Einzahlung des Manipulators	**Quote Team B**	**Reale Auszahlung bei Sieg Team B**	**Gewinn**
68000	2,025641026	123969,2308	55969,23077
69000	2,012658228	124986,0759	55986,07595
70000	2	126000	56000
71000	1,987654321	127011,1111	56011,11111
72000	1,975609756	128019,5122	56019,5122
73000	1,963855422	129025,3012	56025,3012
74000	1,952380952	130028,5714	56028,57143
75000	1,941176471	131029,4118	56029,41176
76000	1,930232558	132027,907	56027,90698
77000	1,91954023	133024,1379	56024,13793
78000	1,909090909	134018,1818	56018,18182
79000	1,898876404	135010,1124	56010,11236
80000	1,888888889	136000	56000
81000	1,879120879	136987,9121	55987,91209
82000	1,869565217	137973,913	55973,91304

Wir erkennen an Tabelle 3 deutlich, dass der Gewinn tatsächlich nicht beliebig hoch steigen kann. Für unser Beispiel ist das Optimum bei 75000 Euro erreicht. Diese Einsicht können wir auch durch eine entsprechende graphische Aufbereitung der Tabelle noch unterstützen. Auch wenn die entsprechenden Begriffe aus der Analysis in der Sek I noch nicht bekannt sind, ist die Grafik gut zu interpretieren: Wenn der Einsatz (blaue Gerade) immer weiter gesteigert wird, sinkt ab etwa 75000 Euro der Gewinn, statt wie vom Manipulator erhofft zu steigen. Auch hier sehen wir wieder ein Argument dafür, wie günstig es für den Buchmacher ist, die Quoten laufend den Einsätzen anzupassen. Er wird zwar bei einer solchen Manipulation weniger verdienen als der Totalisator, braucht aber keinesfalls um seine finanzielle Existenz zu fürchten.

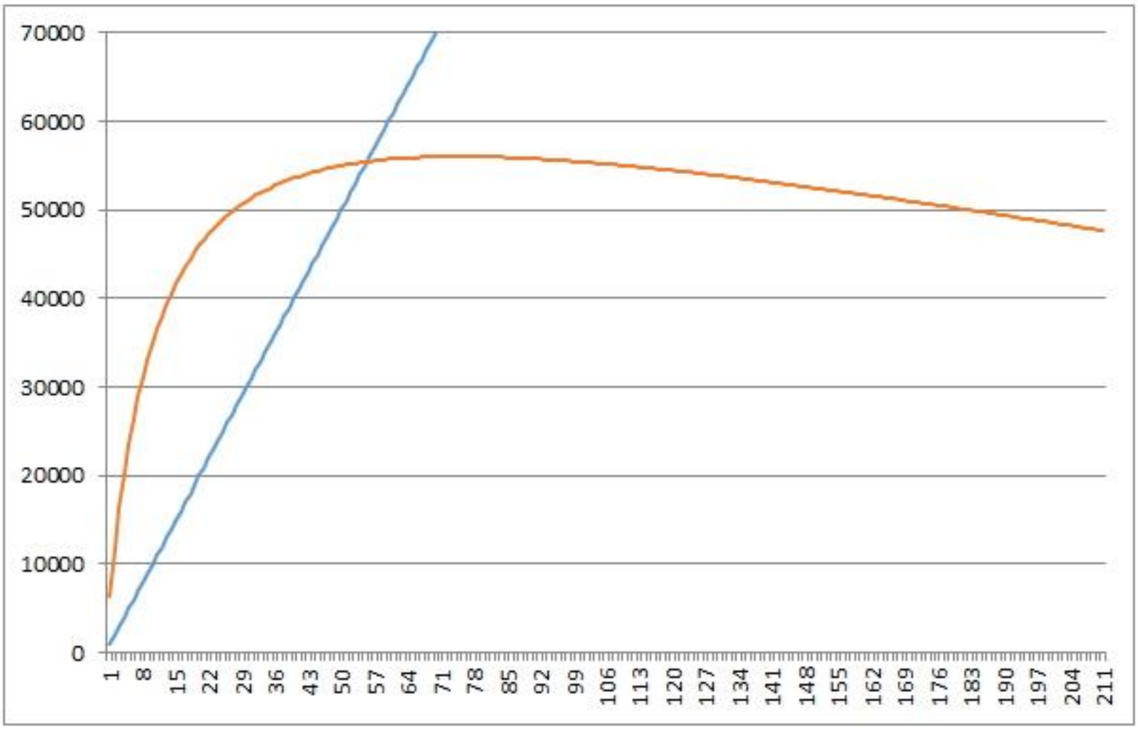


Abbildung 18: Grafik 2 zum Wettbetrug

Möchten Sie die Frage nach dem maximalen Gewinn durch Manipulation an diesem Beispiel oder auch allgemein mit den Mitteln der Analysis lösen? Wenn Sie eine Funktion finden, die den rot gezeichneten Graphen bestimmt, rechnen Sie bitte auch gleich den Wert aus, bei dem der Totalisator sich freut, weil die rote Kurve durch die X – Achse geht. Was würde das allerdings für die Quote für einen Sieg von Team B bedeuten?

Wir entscheiden uns für die Untersuchung einer anderen Frage: was bekommt in diesem Fall der Torwart für sein unsportliches Verhalten? Wie viel vom Gewinn durch den Wettbetrug geht an den Torwart? Wie sieht insgesamt die finanzielle Seite für den Manipulator aus? Kann man einen Spieler für einen (aktiven) Wettbetrug gewinnen, so muss ein solcher Spieler jedenfalls fürchten, bei diesem Betrug ertappt zu werden. Ist er sich dessen bewusst, so wird er seinen Preis sehr hoch ansetzen. Gehen wir von einem durchschnittlichen Torwart mit einem Jahresgehalt von ca. 1.000.000 Euro im Jahr aus. Dieser Torwart lässt sich kaufen und ist sich der Tatsache bewusst, dass beim Betrug erwischt werden kann. Daher möchte er „vorsorgen“ und setzt seinen Preis entsprechend hoch an: Er möchte 7 Millionen Euro, weil er mit weiteren 7 aktiven Spieljahren rechnet. Nun stellen sich zu diesem Zeitpunkt zwei Fragen: die für den Torwart interessante Frage: Wird mir das tatsächlich bezahlt? Und aus Sicht desjenigen, der manipulieren möchte: Kann und will ich die geforderte Summe tatsächlich aufbringen?

Die erste Frage, d.h. die für den Torwart interessante Frage, wurde in der Fernsehdokumentation der ARD bereits gut begründet beantwortet. Personen, welche versuchen, Wetten zu manipulieren, haben kein Interesse daran, dass andere ebenfalls daran Beteiligte gut verdienen. Häufig werden deshalb nicht hohe Summen an die Manipulationshelfer auf dem Spielfeld ausgezahlt, sondern es wird mit Erpressung gearbeitet. Wer einmal Geld genommen hat, wird beim zweiten Mal damit bedroht, dass die erste Straftat der Polizei gemeldet wird. Außerdem hat der Torwart Menschen, die ihm nahe stehen. Wenn ihm damit gedroht wird, dass solche Menschen einen Schaden erleiden, greift er vielleicht auch für einen geringen Teil des Gewinnes aus dem Wettbetrug bewusst neben den Ball.

Abschließende Reflexion: Suchtprävention als Unterrichtsziel?

In den meisten Jugendschutzgesetzen steht ganz zu Recht, dass den Heranwachsenden die Teilnahme an Glücksspielen um Geld nicht erlaubt ist. Wettbüros haben deshalb am Eingang ein Hinweisschild „Kein Zutritt unter 18 Jahren“ und Internetwettanbieter verlangen einen Nachweis, dass die Wettenden älter als 18 Jahre sind. Spielautomaten in Gaststätten sind eine z.T. rechtlich umstrittene Grauzone. Trotz der Gesetze und Verbotsschilder finden sich in den Medien immer wieder Berichte über Jugendliche (und noch mehr Erwachsene), die hohe Spielschulden angehäuft haben. Wir möchten nicht nur motivierenden Mathematikunterricht mit Erziehung zur Mündigkeit verbinden, sondern auch diese erschreckende Zahl verringern, also dazu beitragen, durch eigene Erkenntnis zu dem festen Entschluss zu kommen, sich nicht Glückspielen um Geld zu beteiligen. Die vielfache Erfahrung mit anderen Suchtgefahren Tabak, Alkohol oder andere Drogen) zeigt sehr deutlich, dass sich Suchtvermeidung nicht dadurch erreichen lässt, dass Erziehende in der Schule und außerhalb das Thema vermeiden.

Um eine Sucht zu vermeiden oder abzubauen, reichen Informationen und Ermahnungen nicht aus; der eigene Wille ist unabdingbar. Gerade deshalb ist es aus unserer Sicht bei diesem Thema so wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler das Thema und mögliche Folgerungen für das eigene Verhalten möglichst selbstständig erarbeiten und für sich selbst Konsequenzen daraus ziehen können. Ein lehrerzentrierter Unterricht hat hier also nicht nur weniger Aussichten auf mathematischen Lernerfolg, sondern auch auf eine pädagogisch gewünschte Verhaltensänderung.

Kapitel 7: Wie modellieren Profis? Und was nützt uns das für den Mathematikunterricht?

Wussten Sie schon, dass viele tausend Menschen ihren Lebensunterhalt mit mathematischem Modellieren verdienen? Was machen diese Menschen? Welche Art von Modellen stellen sie auf und was sind die Resultate dieser Arbeit? Auch wenn dies eines der Kapitel ist, in denen wir Sie über Hintergründe und Zusammenhänge informieren, ersuchen wir Sie zur aktiven Mitarbeit. Weshalb? Wir schlagen vor, aus diesem Kapitel den Stoff für Referate bzw. Facharbeiten der Schülerinnen und Schüler zu gewinnen. Damit Sie besser einschätzen können, wie leicht oder schwer es ist, die nötigen Informationen für ein solches Referat zusammenzustellen, ersuchen wir Sie hiermit, selbst zu suchen. Was finden Sie im Internet zum Stichwort Industrie- bzw. Technomathematik?

Bevor wir auf die Suchergebnisse eingehen, noch ein Hinweis zum Unterricht: Indem wir Ihnen die beiden Stichworte Industrie- bzw. Technomathematik als Orientierung für die Suche nach den Werken der Profimodellierer und Profimodelliererinnen genannt haben, geben wir Ihnen auch einen methodischen Tipp für die Vergabe von Referatsthemen: Durch solche Hinweise können Sie selbstverständlich die Arbeit der Schülerinnen und Schüler wesentlich beeinflussen.

Wenn Sie das Stichwort Industriemathematik eingeben, führen die meisten der Hinweise im Internet auf den entsprechenden Schwerpunkt an der Johannes Kepler Universität Linz, auf Kolleginnen und Kollegen, die in diesem Bereich wirken und nicht zuletzt auf Firmen, die von der Kooperation mit der Industriemathematik profitiert haben.

Ausgangspunkt der Technomathematik ist das Wirken von Prof. Dr. Neunzert an der Universität Kaiserslautern. Auf der Homepage wird der Schwerpunkt Technomathematik so beschrieben: „Der Schwerpunkt Technomathematik ist in seinem Forschungsprofil fokussiert auf die Modellierung, Analysis und numerische Simulation von Differentialgleichungen sowie deren Optimierung und Kontrolle.

Dieser wichtige Zweig der angewandten Mathematik greift Probleme aus der Physik, den Ingenieurswissenschaften oder den Lebenswissenschaften auf und entwickelt neue Modelle und Techniken zur analytischen und numerischen Behandlung derselben.

Die Forschungsthemen sind sehr anwendungsorientiert und werden teilweise durch aktuelle Fragestellungen in den Abteilungen des Fraunhofer-Instituts für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM) beeinflusst. Die entwickelten mathematischen Methoden und Algorithmen finden dadurch direkt Verwendung bei der erfolgreichen Bearbeitung von industrienahen Fragestellungen.

Die mathematischen Kompetenzen des Schwerpunkts Technomathematik liegen in der Modellierung, Analysis und Simulation mit (stochastischen) partiellen Differentialgleichungen und Differential-Algebraischen Gleichungen mit Anwendungen in der Strömungsdynamik, in den Lebenswissenschaften, im Strahlungstransport, der Verkehrsmodellierung und im Bereich der Halbleitergleichungen. Neben den klassischen elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Gleichungen werden auch stochastische Differentialgleichungen sowie kinetische Modelle und nicht-lokale Integro-Differentialgleichungen untersucht. Ferner werden Methoden aus der Optimierung mit partiellen Differentialgleichungen genutzt, um inverse Probleme und Optimalsteuerungsprobleme für die obigen Anwendungsfelder zu lösen. Über diesen Bereich gibt es eine enge Verzahnung mit den Bereichen der algebraischen und numerischen Kontrolltheorie mit Anwendungen in der Elektrotechnik und der Fahrzeugsimulation. Die enge Verzahnung der Professuren innerhalb des Schwerpunkts sowohl über die Anwendungsfelder, als auch durch die gegenseitige Beeinflussung der Forschungsthemen erzeugt Synergien, die es erlauben, einerseits den Transfer neuer mathematischer Methoden in die Abteilungen des Fraunhofer ITWM sicherzustellen, andererseits bei der gemeinsamen Antragsstellung für koordinierte Forschungsvorhaben erfolgreich zu sein.“ (http://www.mathematik.uni-kl.de/forschung/technomathe/).

Wir haben an dieser Stelle ein längeres Zitat eingefügt, um mit Ihnen darüber nachzudenken, was wohl Ihre Schülerinnen und Schüler mit einer solchen Beschreibung anfangen können. Zunächst ist uns aufgefallen, dass gleich zu Beginn das Stichwort „Modellierung“ fällt: Wir nehmen das als Bestätigung dafür, dass die Profis tatsächlich mathematisch modellieren und sind gespannt darauf, was sie wie modellieren. Einige der folgenden Begriffe klingen vertraut, etwa Analysis und Optimierung. Andere mathematische Stichworte wie „numerische Simulation von Differentialgleichungen“, „nicht-lokale Integro-Differentialgleichungen“, „(stochastische) partielle Differentialgleichungen und Differential-Algebraischen Gleichungen“ lassen jedoch den Verdacht aufkommen, dass es Themengebiete der Analysis gibt, die im Mathematikunterricht nicht thematisiert werden. Was nun?

Viele Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer stellen an sich selbst, aber auch an ihre Schülerinnen und Schüler den Anspruch, die im Unterricht behandelte Mathematik möglichst vollständig zu verstehen. Der Anspruch führt im Bereich der Mathematik, die in der Sek II behandelt wird, bisweilen dazu, dass schwierige Fragen etwa rund um das Thema der Unendlichkeit, der Vollständigkeit der reellen Zahlen oder dem Beweis der Transzendenz von e und Pi nicht behandelt werden und die Aufmerksamkeit im Unterricht eher auf den Kalkül gelenkt wird. Wir haben einerseits Verständnis für diese Position (wer möchte schon im Unterricht erleben, eine Frage auch nach längerer Nachdenkzeit nicht beantworten zu können, weil das Fachwissen nicht hinreicht?) und möchten sie andererseits doch nicht so bestehen lassen, weil sie den Mathematikunterricht einer wichtigen und motivierenden Chance beraubt. Dazu greifen wir einen Vorschlag auf, der vor über 20 Jahren in der ISTRON Gruppe gemacht wurde.

Im ersten Band der Schriftenreihe der „ISTRON“-Gruppe (hg. v. W. Blum 1993, S. 74 - 84) haben J. Maaß und W. Schlöglmann aus Linz den Vorschlag unterbreitet, im Mathematikunterricht über Projekte aus der Industriemathematik oder Technomathematik zu berichten. Sie haben diesen Vorschlag im Text ausführlich begründet und am Beispiel der Optimierung eines Stoßofens in der Stahlherstellung bei der VOEST in Linz ausgeführt. Der Vorschlag wurde seinerzeit auch von der ISTRON - Gruppe heftig kritisiert und von den meisten Kolleginnen und Kollegen strikt abgelehnt. Das zentrale Argument dagegen war, dass ein

Mathematiklehrer bzw. eine Mathematiklehrerin keinesfalls im Mathematikunterricht ein Thema anschneiden bzw. behandeln darf, wenn er oder sie nicht in der Lage ist, alle möglichen Fragen zur Mathematik vollständig zu beantworten. Das aber ist bei Profi-Modellierungen fast immer unmöglich: Ob nun etwa mit Numerik, Fuzzy Logic, Geometrie oder Gröbnerbasen agiert wird (wie es bei vielen Industriemathematikprojekten in Linz der Fall war und ist): die eingesetzte Mathematik ist oft auf dem Niveau von Dissertationen oder sogar weit darüber, also im mathematischen Niveau sehr weit von dem entfernt, was Lehrende und Lernende im Mathematikunterricht behandeln können.

Andererseits wird im Mathematikunterricht immer wieder die Sinnfrage gestellt. „Wozu sollen wir das lernen?“ Vor diesem Hintergrund ist das oben angeführte Argument zu hinterfragen: Soll im Mathematikunterricht wie in anderen Unterrichtsgegenständen auch über aktuelle Forschungen und besondere Forschungsergebnisse berichtet werden?

Ein Mathematiklehrer bzw. eine Mathematiklehrerin braucht sich keinesfalls dafür zu schämen, dass er bzw. sie nicht die Details der verwendeten Mathematik erläutern kann. Wie arm wäre der Unterricht in Kunst oder Deutsch, wenn die Lehrperson nur jene Werke besprechen dürfte, die sie selbst erschaffen hat bzw. erschaffen könnte? Wie viel vom derzeit positiven Image der Biologie entsteht dadurch, dass von medizinischen Erfolgen im Kampf gegen Seuchen oder Krebs berichtet wird, ohne das die Biologielehrkraft jemals selbst medizinische Forschung betrieben hat? Ähnlich lässt sich für die anderen Unterrichtsgegenstände auch argumentieren.

Dem Stil dieses Buches entsprechend brechen wir hier die allgemeine Argumentation ab und bringen ein – hoffentlich motivierendes Beispiel für einen aus dem Internet zusammengestellten Bericht über Industriemathematik. Dieser hat uns fasziniert obwohl wir die für ein solches Forschungsprojekt notwendigen medizinischen Kenntnisse nicht unmittelbar verfügbar haben.

Magnetresonanztomographie

Eine wesentliche Grundlage der Erfolge der modernen Medizin sind die Fortschritte in der Diagnostik. Heutzutage ist es möglich, in den menschlichen Körper „hineinzuschauen“, ohne ihn aufzuschneiden. Strahlen unterschiedlicher Wellenlänge werden in den Körper gesendet, Reflexionen, Abschwächungen, Beugungen etc. werden gemessen und aus den Messergebnissen wird ein Bild ausgerechnet, das etwa einen Schnitt durch das Herz, das Gehirn oder die Wirbelsäule zeigt. Viele Bilder dieser Art werden mit Hilfe der passenden Software zu einem Gesamtbild zusammengefügt. Der neueste Stand der Entwicklung zeigt sogar Organe oder Gelenke in Funktion und ermöglicht damit noch bessere Diagnosen.

Nehmen wir als Beispiel für eine solche Diagnose die Magnetresonanztomographie als eine Strahlenart, die - im Unterschied zu Röntgenstrahlen - als absolut harmlos eingestuft wird, dann können wir z.B. in Wikipedia (http://de.wikipedia.org/wiki/Magnetresonanztomographie) einen sehr umfangreichen und offenbar professionell verfassten Beitrag darüber lesen. Aus mathematischer Perspektive fällt auf, dass zwar oft Mathematik vorkommt, die grundlegenden und entscheidenden Fortschritte aber nicht der Mathematik zugeordnet werden. Das ist für die allermeisten Technologien typisch!

Was hat Mathematik damit zu tun? Wie finden wir sie? Nehmen wir als Beispiel den zweiten Satz der Erläuterung zur „historischen Entwicklung“: „Paul Lauterbur (USA) hatte zwei grundlegende Ideen, die eine Bildgebung auf der Grundlage der NMR erst möglich machten. Erstens gelang es ihm mit Feldgradienten-NMR, d.h. die Einführung von magnetischen Gradientenfeldern in das konventionelle NMR-Experiment, die NMR-Signale bestimmten räumlichen Bereichen einer ausgedehnten Probe zuzuordnen (Ortskodierung).“ Wo steckt da die Mathematik? Richtig, in den Gradientenfeldern! Was ist das? „Der Gradient ist ein mathematischer Operator, genauer ein Differentialoperator, der auf ein Skalarfeld angewandt werden kann und in solchem Fall ein Gradientenfeld genanntes Vektorfeld liefert, das die Änderungsrate und Richtung der größten Änderung des Skalarfeldes angibt“ (http://de.wikipedia.org/wiki/

Gradient_%28Mathematik%29).

Nehmen wir als zweites Beispiel den folgenden Satz aus der historischen Beschreibung: „1985 gelang Axel Haase, Jens Frahm und Dieter Matthaei in Göttingen mit der Erfindung des Schnellbild-Verfahrens FLASH ein grundsätzlicher Durchbruch in der MRT. Die FLASH-Technik reduzierte die damaligen Messzeiten um bis zu zwei Größenordnungen (Faktor 100) ohne substantielle Verluste an Bildqualität.“ Selbstverständlich steckt die Mathematik dahinter, wenn es auf einmal so viel schneller geht! Der Link http://www.mpg.de/606306/pressemitteilung20100830 zu einer Pressemitteilung der Max - Planck - Gesellschaft bringt eine Erläuterung:

„**Weniger ist mehr: Beschleunigung durch bessere Bildberechnung**

Für den Durchbruch zu Messzeiten, die nur noch Bruchteile einer Sekunde betragen, mussten mehrere Entwicklungen erfolgreich miteinander verknüpft werden. So verwendeten die Wissenschaftler zwar erneut die FLASH-Technik, dieses Mal aber mit einer radialen Kodierung der Ortsinformation, welche die MRT-Aufnahmen gegenüber Bewegungen weitestgehend unempfindlich macht. Um die Messzeiten weiter zu verkürzen, war Mathematik gefragt." „Es werden erheblich weniger Daten aufgenommen als für die Berechnung eines Bildes normalerweise notwendig sind. Ein von uns neu entwickeltes mathematisches Verfahren macht es möglich, dass wir aus den eigentlich unvollständigen Daten ein aussagekräftiges Bild berechnen können", so Frahm. Im Extremfall lässt sich so aus nur fünf Prozent der Daten eines normalen MRT-Bildes ein vergleichbar gutes Bild berechnen - entsprechend einer 20-fach kürzeren Messzeit. Die Göttinger Wissenschaftler haben damit die MRT-Messzeit seit Mitte der 1980er-Jahre insgesamt um den Faktor 10000 beschleunigt.“

Mit diesen Basisinformationen und all dem, was sich dazu im Internet dazu finden lässt, kann mehr als ein Referat von Schülerinnen und Schülern ausgearbeitet werden. Wir empfehlen für ein Schülerreferat die Konzentration auf ein typisches Anwendungsgebiet von Magnetresonanztomographie, etwa die Untersuchung von Gelenken oder Organen, die neuerdings sogar in Echtzeit bei der Arbeit beobachtbar sind. Das gibt schöne Bilder, einen relevanten Bezug zur Lebenswelt und nicht zuletzt eine nachhaltige Einsicht in den Nutzen der Mathematik. Diese

Einsicht wird nicht geschmälert, wenn - wie in den meisten anderen Fällen - eine die Unterrichtsfächer übergreifende Kooperation an (mit Biologie und Physik) versucht wird.

Noch ein methodischer Tipp für den Unterricht. Für alle Lehrkräfte, die sich intensiver mit Frage beschäftigen möchten, wie denn aus den Messungen von Reflexionen etc. ein Bild des Objektes im Inneren berechnet werden kann, schlagen wir ein Experiment vor: In der Schulklasse wird ein geometrisch einfaches Objekt, etwa ein Buch oder Papierkorb, auf den Fußboden gelegt und durch einen rollenden Ball erkundet. Skizze:

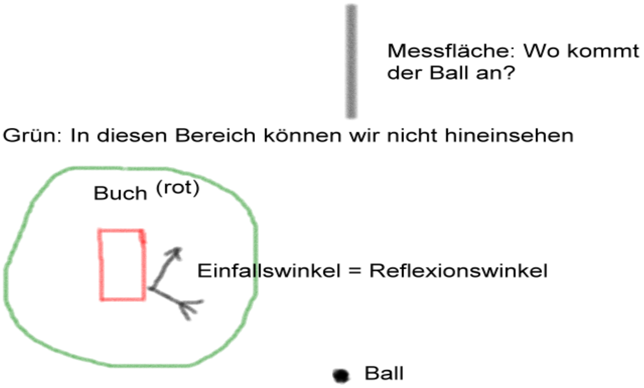


Abbildung 20: Idee zur Simulation der Messung

Falls Sie, liebe Leserin oder lieber Leser, sich mit diesem Experiment näher beschäftigt haben, senden Sie uns bitte das Ergebnis. Wie oft muss ein Ball aus wie viel verschiedenen Richtungen gerollt werden, damit das geheimnisvolle rote Objekt in der Mitte des nicht einsehbaren Bereiches hinreichend exakt bestimmt werden kann? Was ist hier „hinreichend exakt“?

Was halten Sie von dem Beispiel? Können Sie sich vorstellen, es für Ihren Unterricht zu verwenden? Wir kennen Ihre Antwort nicht; unabhängig von Ihrer jetzigen Position versuchen wir Sie durch weitere Beispiele zu überzeugen.

Landwirtschaft

Mathematik wird in der Landwirtschaft seit langer Zeit in vielfältiger Weise genutzt, etwa zur Optimierung von Fütterung, zu betriebswirtschaftlichen Berechnungen, zum Einsatz von Saatgut und Düngemitteln etc. Prof. Dr. Peter Gritzmann (TU München) und seinen Kollegen verdanken wir eine neue und ökonomisch sehr hilfreiche Anwendung von Mathematik. Eine typische Aufteilung von landwirtschaftlichen Flächen in einer ländlichen Region war der Ausgangspunkt seiner Überlegungen:

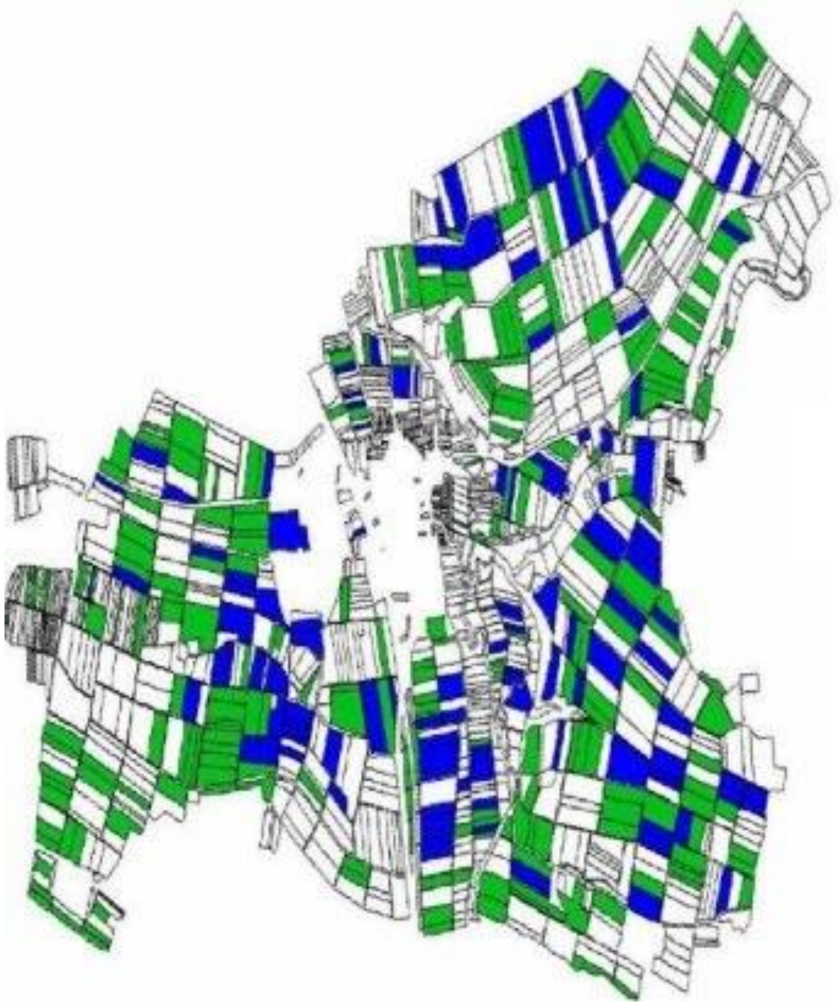


Abbildung 21: Optimierung in der Landwirtschaft *vorher*

Quelle: http://www-m9.ma.tum.de/Projekte/LandConsolidation

Historisch gewachsen ist ein Fleckenteppich von relativ kleinen Nutzflächen, die bunt gestreut sind. Der Wunsch jedes landwirtschaftlichen Betriebes ist es jedoch, möglichst geschlossene und große Flächen nahe beim eigenen Hof zu haben. Große Flächen ermöglichen den Einsatz großer Maschinen. Die großen Traktoren, Mähdrescher etc. kosten zwar bei der Anschaffung mehr als kleine Maschinen, ermöglichen aber in derselben Arbeitszeit die Bearbeitung (ernten, beackern etc.) von größeren Flächen. Wenn vor dem drohenden Gewitter noch möglichst schnell viel Korn gemäht und gedroschen werden soll, ist die Zeit ganz wichtig. Kurze Transportwege durch Nähe zum eigenen Hof statt längere Fahrten zu entfernten Flächen sind offensichtlich günstiger.

Für alle Beteiligten schön und ökonomisch sinnvoll wäre es nun, Flächen so zusammenzulegen und zu tauschen, dass alle Beteiligten ertragreicher wirtschaften können. Der traditionelle Weg zu dieser Verbesserung ist die Flurbereinigung, ein erfahrungsgemäß langwieriges staatliches Verfahren, das nicht immer den gewünschten Erfolg bringt. Das Bild oben zeigt den Zustand *nach* einer Flurbereinigung. „Geht das nicht besser?“, fragte sich das Projektteam und entwickelte ein – sehr aufwendiges – mathematisches Verfahren, den Wert der einzelnen Grundstücke (Bodenqualität, Ertrag, Entfernung zum Hof des Besitzers,… und nicht zuletzt die für diese Grundstücke gezahlten EU-Agrarsubventionen!) zu berechnen und gerechte Tauschmöglichkeiten zu kalkulieren. Hier ist das Ergebnis:

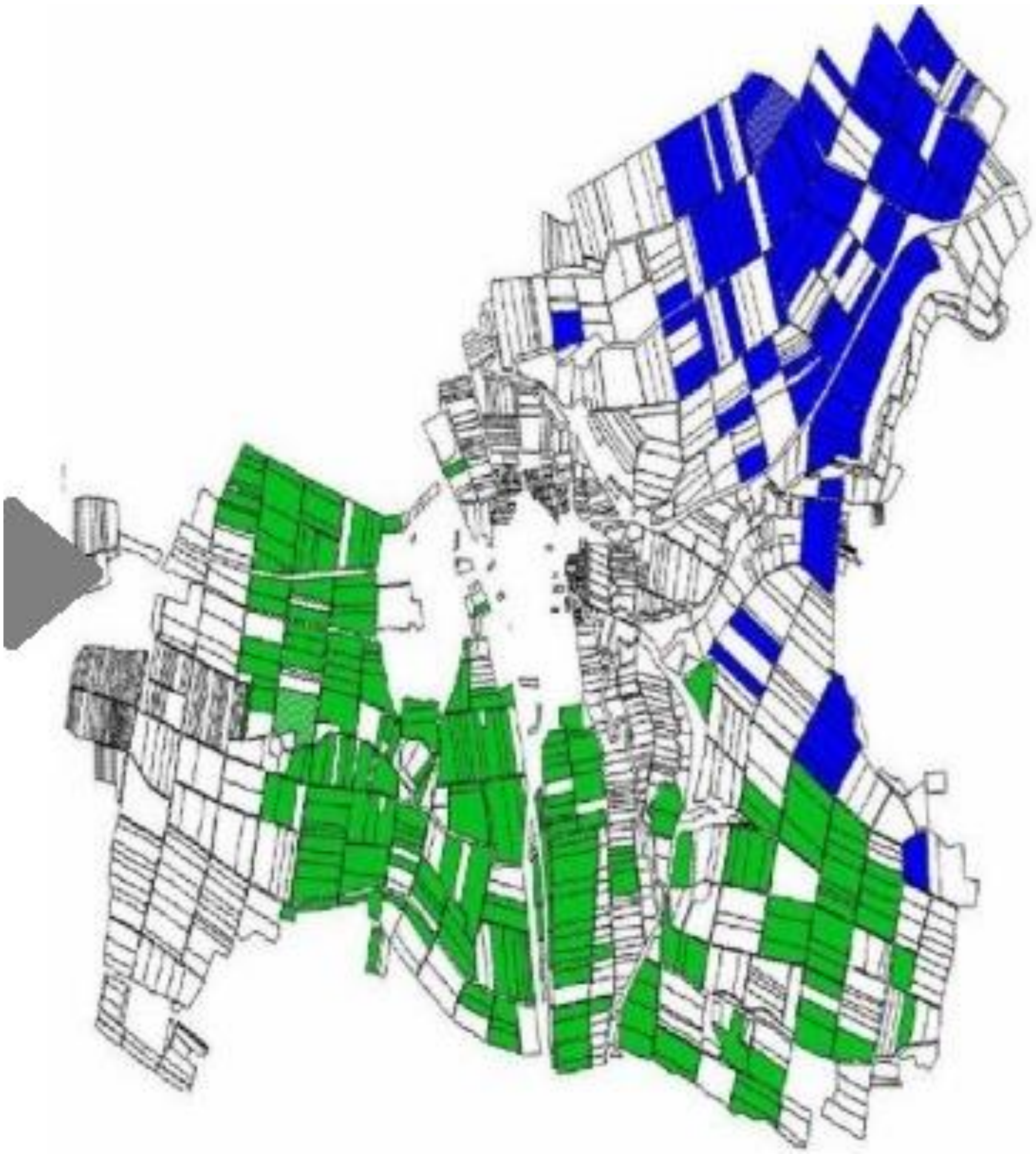


Abbildung 22: Optimierung in der Landwirtschaft *nachher*
Quelle: http://www-m9.ma.tum.de/Projekte/LandConsolidation

Hier sagt ein Bild (besser: ein Vergleich der beiden Bilder) wirklich mehr als tausend Worte. Die Optimierung ist offensichtlich gelungen, blaue und grüne Felder sind zusammengefügt. Wenn der wirtschaftliche Nutzen dieser Umsortierung den Schülerinnen und Schülern deutlich wird, haben sie ein Beispiel für die realitätsnahe Anwendung von Mathematik verstanden, ohne die Optimierungsmethode genauer zu betrachten.

Hier ein zweites Beispiel für eine mathematische Modellierung, das noch beeindruckender ist: eine landwirtschaftliche Region mit 7 Landwirten und 419 Flurstücken sah vorher so aus:

Abbildung 23: Optimierung in der Landwirtschaft, 2. Bsp. ***vorher***

Und das ist das Bild NACH der Optimierung:

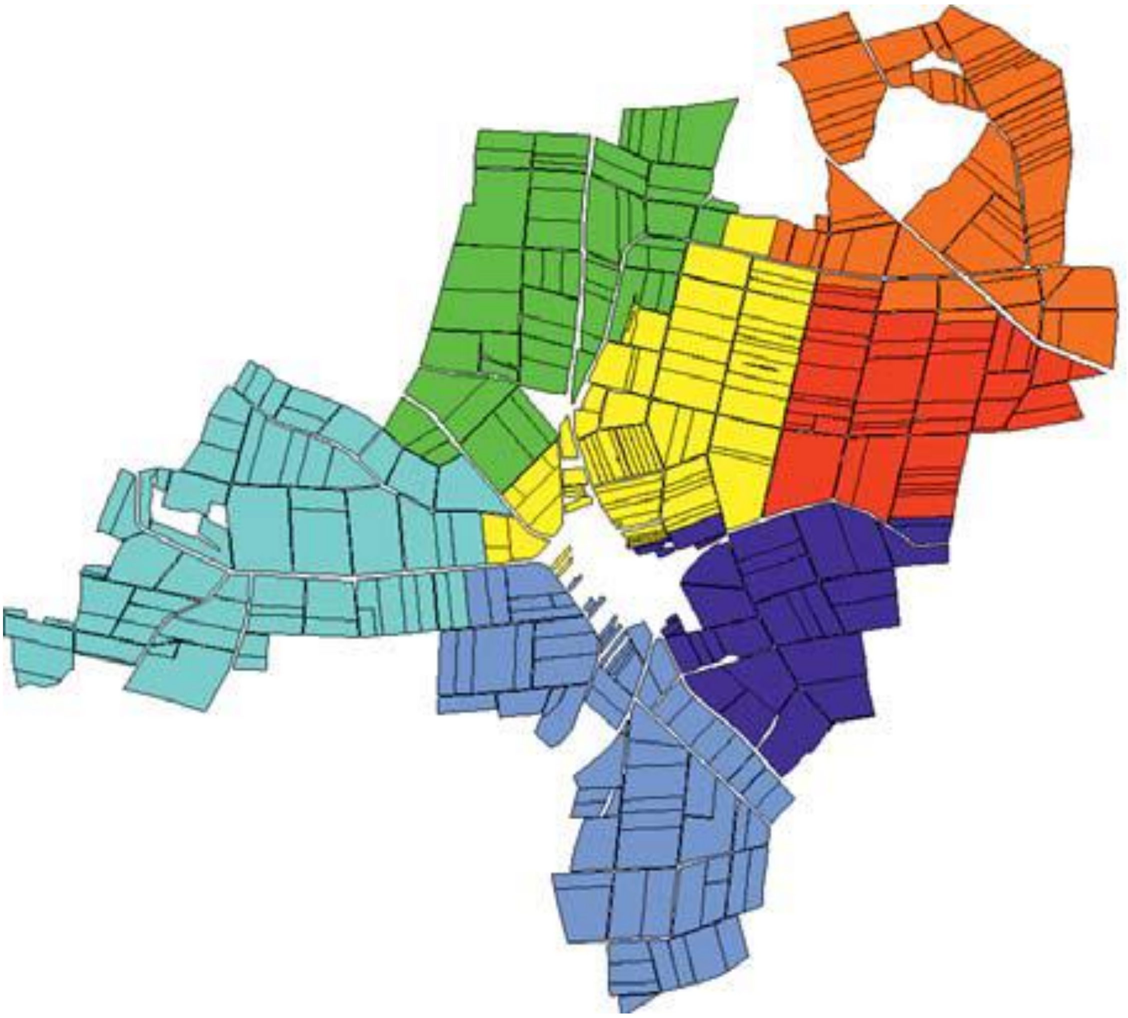


Abbildung 24: Optimierung in der Landwirtschaft, 2. Bsp. *nachher*

Quelle: S. Borgwardt u.a. 2014, die Bilder wurden freundlicher Weise zur Verfügung von Prof. Dr. P. Gritzmann (TU München)

Transport und Logistik

Wer die langen Kolonnen von LKW's auf der Autobahn oder endlos lange Güterzüge sieht, braucht gar nicht mit der „just-in-time" Produktionsstrategie vertraut zu sein, um zu ahnen, wie viele Güter rechtzeitig von A nach B transportiert werden müssen, um Versorgung und Produktion zu sichern. Auch außerhalb der Mathematik bekannt ist das „travelling salesman" Problem, also die Frage nach der optimalen Route für einen Vertriebsmitarbeiter, der in möglichst kurzer Zeit eine Reihe von möglichen Verkaufsstandorten anfahren soll. Das gleiche Problem tritt auf, wenn ein LKW z.B. eine Reihe von Filialen einer Handelskette beliefern soll. Eine auch mathematisch andere Art von Fragestellung entsteht, wenn Automobile gebaut werden sollen, die aus mehreren Tausend Teilen zusammengesetzt sind, die an unterschiedlichen Standorten produziert werden. Ein Zulieferer baut Tachometer, einer stellt Felgen für die Reifen her und ein anderer Bremsen, ein anderes Werk des Konzerns baut die Motoren, die ihrerseits Zulieferer z.B. für die Steuerungselektronik haben etc. All das soll auf eine Weise ineinander greifen, dass alle für die komplette Montage eines Autos benötigten Teile rechtzeitig im Montagewerk sind und möglichst nirgendwo gelagert werden müssen (das kostet extra Geld und Logistikaufwand). Auf keinen Fall darf die Montage auf Teile warten – das wird ganz teuer. Es ist offensichtlich, dass hier genau geplant werden muss und dass Mathematik zur Planung und Optimierung benötigt wird. Das RISC in Hagenberg hat sich mit diesen Fragen intensiv beschäftigt und bietet Software für Transport- und Logistikfirmen (vgl.: http://www.risc-software.at/de/logistics-informatics/intelligente-verkehrsssysteme).

Das - aus unserer Sicht - Schöne an dieser Problemstellung ist, dass sie leicht verständlich und leicht simulierbar ist. Schon mit wenigen Stationen und Anforderungen an Transporte lässt sich die Problematik nachvollziehen und verstehen. Wir empfehlen Versuche mit Spielzeugautos und Legosteinen, die beobachtet und ausgewertet werden. Für den reisenden Verkaufsmitarbeiter kann sehr gut beobachtet werden, wie schnell die Komplexität steigt, wenn die Anzahl der Stationen wächst.

Transport- und Logistik ist ein für die Betriebswirtschaft sehr wichtiges Thema. Wenn Sie diesen Bereich im Unterricht behandeln wollen und nach besonders interessanten und aktuellen Fragen suchen, empfehlen wir das Journal für Transport- und Logistik (http://www.springer.com/business+%26+management/operations+research/journal/13676).

Die dafür benötigte Mathematik liegt meistens noch im Bereich der Sekundarstufe II (z.B. Lineare Optimierung, Graphentheorie, Netzplantechnik,…), die betriebswirtschaftlichen Hintergründe auch ohne ein einschlägiges Studium leicht zugänglich. Sehr diskussionswürdig sind allerdings bisweilen die Modellannahmen, also die Entscheidungen darüber, was in welcher Weise mathematisch modelliert wird.

Hermes: Hitzeverteilung beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre

Wer sich ein wenig für menschlichen Versuche interessiert, den Weltraum zu erkunden, hat in Dokumentationen oder in SF Filmen schon einmal gesehen, dass eine Rückkehr von Raumfahrzeugen auf die Erdoberfläche mit dem Problem zu kämpfen hat, dass wegen der hohen Geschwindigkeit trotz der zunächst sehr dünnen Luftschicht um die Erde viel Reibungshitze entsteht. Wer zu schnell oder im falschen Winkel unterwegs ist, kann sogar verglühen. Wer ein Space – Shuttle bauen möchte, dass mehrfach verwendet werden soll, muss natürlich auch vorher überlegen, wie es konstruiert werden soll, damit es nicht auf dem Rückweg aus dem Weltall durch Hitze beschädigt oder gar zerstört wird. Wegen der hohen Kosten und der Bedingungen bei der Landung ist ein Erprobungsverfahren faktisch ausgeschlossen. Vorüberlegungen und Simulationen sind geboten. Wie kann ein Landeanflug simuliert werden? Durch mathematische Modellierung! Die Arbeitsgruppe Technomathematik in Kaiserslautern hat hier erfolgreiche Pionierarbeit geleistet (vgl.: https://books.google.at/books?id=WCegBwAAQBAJ&pg=PA151&lpg=PA151&dq=Arbeitsgruppe+Technomathematik+in+Kaiserslautern+hermes&source=bl&ots=_5OfBh84cT&sig=U4ZYNO4MogmWmn7dtELaxn3ahy4&hl=de&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=Arbeitsgruppe%20Technomathematik%20in%20Kaiserslautern%20hermes).

Übrigens bringt ein genauerer Blick auf die lange Liste der Veröffentlichungen der Arbeitsgruppe Technomathematik (http://www.mathematik.uni-kl.de/forschung/) noch sehr viele weitere Möglichkeiten für Referate über erfolgreiche Anwendungen der Mathematik in der Technik.

Wege zu Referatsthemen: Max Plank Institute

Eine andere Quelle für motivierende Referate über reale Anwendungen von Mathematik, über erfolgreiche Modellierungen der Realität sind Informationen der Max Plank Gesellschaft (http://www.mpg.de/). Ganz aktuell gibt es dort ein neues Portal für (populär-)wissenschaftliche Filme (http://maxplanckcinema.tumblr.com/ . Auf den ersten Blick gibt es dort keine Filme über Mathematik, sondern nur solche über Physik, Geowissenschaften und Biologie. Sobald aber solch ein Film abläuft, fallen schnell die typischen Schlüsselwörter, die uns zeigen, dass hier Mathematik angewendet wird: Computersimulation, Berechnung, Modellierung, Optimierung, Wahrscheinlichkeit etc.

Ganz ähnlich ergeht es uns, wenn wir mehr oder weniger zufällig eines der vielen Max Plank Institute auswählen und eine Pressemitteilung zu einer aktuellen Studie lesen. Auf den ersten Blick geht es eine „Kontrolle für medizinische Nanolieferungen“ (http://www.mpg.de/606935/pressemitteilung201006083?filter_order=L&research_topic=). Aber schon im Untertitel finden wir deutliche Hinweise auf die Mathematik: „Ein Modell erlaubt Vorhersagen, wie effizient sich Nanopartikel an die Oberflächen von Tumorzellen heften“. Selbstverständlich handelt es sich um ein mathematisches Modell, eine mathematische Modellierung eines biologischen Vorgangs, der aus medizinischer Sicht interessant ist.

Andere Wege: Geschichte

Nanotechnologie, Atomkraftwerke, Kosmologie, Gentechnologie, Chemical Engineering, Mechatronik, Volkswirtschaft und viele weitere aktuelle Anwendungsgebiete der Mathematik können große Faszination erwecken, aber auch abschrecken. Negative Motivation kann dabei nicht nur von der Neuheit und Unvertrautheit der Neuen Technologien ausgehen, sondern auch von möglichen Risiken der Nutzung, die sich ja etwa bei der Atomkraft schon sehr deutlich bemerkbar gemacht haben. Deshalb schlagen wir vor, auf der Suche nach Beispielen für mathematische Modellierungen den Blick auch rückwärts, auf die Geschichte zu werfen. In der sehr kompakten und abstrakten Darstellung mathematischer Zusammenhänge und Theorien, die heute vorherrscht, kommt die Entstehungsgeschichte mit allen Fehlern und Rückschlägen oft nicht mehr vor. Nicht zu Unrecht gibt es deshalb in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik einen Arbeitskreis zur Geschichte der Mathematik, der ausdrücklich darauf hinarbeitet, die historische Entwicklung der Mathematik für didaktische Zwecke nutzbar zu machen.

Wir geben hier nur ein Beispiel zur Anregung. Über einen Mathematiker aus dem 18. Jahrhundert, J.-H. Lambert (1728 – 1777, Mitglied der der Akademie der Wissenschaften in Berlin), und sein Wirken liegt eine Studie von K.-R. Biermann vor, in der die Tätigkeiten Lamberts beschrieben werden: "Da waren Erfindungen technischer Art meist nach ihren Beschreibungen auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen, vom Zoll zurückgehaltene optische und mechanische Instrumente zu begutachten, die Herstellung von Salz zu optimieren, der Plan zur Errichtung einer Schwefelsäurefabrik durchzusehen, eine Maschine zu beurteilen, eine Wassermaschine im Botanischen Garten zu erproben, die Frage der Berechtigung des Antrages eines Brunnenbaumeisters auf Zahlung eines Vorschusses zu untersuchen, ein Universitätsstudienplan im Fach Philosophie zu prüfen und dergleichen mehr. Das Ergebnis der Prüftätigkeit wurde in einem schriftlichen Rapport festgehalten ... Die Skala der Ansuchen: Um die Mannigfaltigkeit der Thematik zu kennzeichnen, auch hier einige Beispiele, mit denen Lambert zu tun gehabt hat: Erfindung einer Spinnmaschine, Verbesserungen an astronomischen Instrumenten, eine Schrift über Gnomonik, ein Manuskript von Baedov über Erziehungsfragen, Vorschläge zur wirksameren Brandbekämpfung, eine Veröffentlichung über die Verwendung verschiedener Erden, technische Zeichnungen, eine Denkschrift über Kartoffelmühlen, eine Publikation über den Gebrauch von Mineralwässern, eine Veröffentlichung über hydraulische Maschinen, die unvermeidlichen Einsendungen mit angeblichen Lösungen der Quadratur des Kreises, Anmerkungen über die Markscheidekunst von Kästner in Göttingen, eine Abhandlung über magnetische Eigenschaften des Äthers, eine Beschreibung von Experimenten mit Licht und Farbe von Wilson in London, neue Planeten- und Kometentheorien, ein aus dem Ungarischen übersetztes Traktat über die Universalsprache, die Konstruktion eines bequemen Krankenbettes (sein Gutachten hierüber war Lambert so wichtig, dass er es in den

Akademieschriften drucken ließ" (Biermann 1979, S. 1187). An einen solchen Text lassen sich gut Aufgaben zur genaueren Nachfrage anknüpfen, etwa: Was hat Lambert (oder sonst jemand) über Kartoffelmühlen geschrieben? Was hat das mit Mathematik zu tun? Wenn die Erkundung erfolgreich verläuft, wird daraus vielleicht sogar ein neues Projekt: Wir berechnen und bauen selbst so eine Mühle! Unabhängig davon, was die Schülerinnen und Schüler dann mit dieser Mühle in ihrem Alltag anfangen können, garantieren wir Ihnen aufgrund unserer Forschungen zum Thema „Erwachsene und Mathematik“, dass diese Menschen diesen ganz besonderen Mathematikunterricht noch nach Jahrzehnten positiv in Erinnerung haben werden. Leider haben nicht viele Erwachsene auch nur *eine* so positive Erinnerung an ihren Mathematikunterricht.

Exkurs „Mathematik als Technologie“

Wir schließen dieses Kapitel mit einem kurzgefassten Exkurs, der andeuten soll, welchen Stellenwert der in diesem Kapitel vorgestellte Zugang zu und Nutzen von Mathematik im weiten Feld des Verständnisses von Mathematik hat.

In der Geschichte der Mathematik hat es mindestens seit der Blütezeit Griechenlands vor ca. 2500 Jahren immer ein Nebeneinander und Miteinander von Reiner und Angewandter Mathematik gegeben. Einerseits ging und geht es um Theorieentwicklung, die Schule der Logik und des Denkens wie bei den Beweisen in der Geometrie und andererseits um den Nutzen für Beruf und Alltag, etwa bei der Landvermessung oder bei Planungen etwa im Handwerk. Die Frage, ob ein beliebiger Winkel mit Zirkel und Linear in drei gleiche Teile geteilt werden kann, hat über viele Jahrhunderte Menschen zum Nachdenken angeregt. In der Praxis kann jeder Winkel mit einer für die praktischen Zwecke hinreichenden Genauigkeit in drei gleiche Teile zerlegt werden.

Bis zum 19. Jahrhundert waren Gelehrte oft gleichzeitig Reine und Angewandte Mathematiker (wenige waren Mathematikerinnen) und zudem noch Naturforscher. Die großen Bildungsreformen im deutschsprachigen Raum, die rückblickend oft mit dem Namen Humboldt verbunden werden, waren auch der Ausgangspunkt für die Einrichtung von universitären Stätten der Forschung und Lehre in Reiner und Angewandter Mathematik (z.B. in Göttingen, wo u.a. F. Klein und D. Hilbert als Professoren tätig waren), wie wir sie heute kennen. Im 20. Jahrhundert neu hinzugekommen ist die Technomathematik (G. Neunzert, Kaiserslautern) bzw. Industriemathematik (H.J. Wacker, Linz), die seither an vielen weiteren Stadtorten betrieben wird und sehr große Erfolge feiert (vgl. zur historischen Entwicklung der Mathematik Maaß 1988).

Von Mathematik als Technologie zu reden, ist aber noch etwas anderes als Technomathematik zu betreiben. Der Streit um die Frage, ob eine solche Charakterisierung erlaubt und zulässig sei - schließlich ist Mathematik für viele Menschen die Königin der Wissenschaften - wird stark entschärft, wenn argumentiert wird, dass ein Aspekt der Mathematik offenbar auch der Technologische ist. Also: Mathematik ist nicht „*nur noch*“ Technologie, *sondern auch* Technologie. Diese Diskussion wurde im Zuge einer internationalen Tagung im Jahre 1988 initiiert (vgl. dazu den Tagungsband von Maaß/Schlöglmann 1989). Mittlerweile scheint die Begriffsbildung unumstritten, wie etwa eine Broschüre „Mathematik ist Technologie. Ein Beitrag zur Innovations-Initiative aus Fraunhofer-Sicht“ der Frauenhoferinstitute in Kaiserslautern und Stankt Augustin zeigt (Neunzert/Trottenberg 2007) zeigt. Übrigens enthält die Broschüre eine ganze Reihe von sehr schönen Beispielen für die Erfolge dieser Art, Mathematik zu betreiben.

Wir wollen an dieser Stelle keine umfassende Hintergrundinformation zur Begriffsbildung liefern, sondern mit Bezug auf das Buch von Maaß und Schlöglmann nur skizzieren, welche Überlegungen dabei zu beachten sind.

Nach einer auf Beckmann zurückgehenden Definition ist Technologie die Lehre von der Bearbeitung von Rohstoffen oder die Wissenschaft von der Umwandlung von Rohstoffen in Fertigprodukte und die Methodik ihrer Bearbeitung. Wenn Regeln zur Rohstoffbearbeitung mathematisch beschrieben sind, etwa als Mischungsverhältnisse oder als formelmäßig aufgestellte physikalische oder chemische Gesetze, die Eigenschaften von Stoffen und Grundlagen ihrer Veränderbarkeit fixieren und zur Steuerung einer Produktionsanlage die numerische Lösung eines Gleichungssystems notwendig ist, so wird offenbar mathematisches Wissen Technologie im Sinne dieser Definition.

Aus philosophischer Sicht stößt dieser Klärungsversuch des Zusammenhangs zwischen Mathematik und Technologie zunächst auf das Problem, dass Mathematik keine empirische Wissenschaft ist. Für P. Ruben ist daher "die Problemstellung 'Mathematik als Technologie?' vorausgesetzt, wir verstehen unter 'Technologie' nicht einfach nur Techniklehre, sondern die Gesamtheit der Lehren wirklicher und möglicher produktiver Arbeiten, das Problem der Kooperation zwischen der Mathematik und jeder artspezifischen Technologie" (Ruben 1989, S. 146) Nach Ansicht von H. Hülsmann berücksichtigt diese Trennung unter den Bedingungen der 'Technologischen Formation' zu sehr das Formale und zu wenig das Formierende: "Nimmt man die Mathematik aber als mathesis universalis, wie das Leibniz getan hat, der damit ja die formale Identität des wissenschaftlichen Wissens im Blick hatte - z. B. Logik, Arithmetik, Geometrie und Mechanik, so ist das Formale darin keineswegs eine inhaltliche Leere, sondern das Formale ist vielmehr der mögliche Zugang zu einer Realität, die als solche einen strukturellen Zusammenhang, eine Einheit, eine Welt darstellt. Hier scheint mir bedeutend, dass in der technologischen Formation jede einzelne Wissenschaft nicht mehr als einzelne zu erfassen und zu bestimmen ist. Diese mathesis universalis ist konkret und von realer Präsenz. Das zeigt sich darin, dass es nicht mehr den Prozess einer einzelnen Wissenschaft geben kann, sondern dass der Prozess des Wissens als technologische Totalität erfasst werden muss, weil er seine technologische Form in allen Disziplinen realisiert." (Hülsmann 1989, S. 124)

Wie teilen den Eindruck, dass diese mathesis universalis konkret und von realer Präsenz ist. Die Mathematik spielt u.E. sogar eine treibende, eine formierende Rolle in der technologischen Formation.

* Sie ist Basis aller Neuen Technologien, weil sie einerseits in Form von Algorithmen Basis der Software und in Form von materialisierter mathematischer Logik Basis der Hardware von Computern bzw. Mikroprozessoren ist und andererseits ohne Computer und mathematische Modellierung auch Atom- und Gentechnologie, Medizintechnik, Automobilbau und Mobiltelefon, Internet und Fernsehen in 3D etc. nicht realisierbar sind.

* Darüber hinaus gewinnen mathematische Theorien und Modellierungen immer mehr Bedeutung als Grundlage vorausschauenden, verschiedene Handlungsalternativen simulierenden Planens und Wissens etwa in wirtschaftlichen und technischen Bereichen wie Steuerung, Optimierung und Konstruktion oder im politischen und sozialen Bereich durch den Ge- und Missbrauch statistischer Methoden.

* Längst etabliert ist Mathematik als wissenschaftlicher Kern von Natur- und zunehmend auch Sozialwissenschaften.

* Selbstverständlich steht die Mathematik nicht außerhalb der Formation, sie ist ohne Zweifel als vergesellschaftete Wissenschaft (vgl. Tschiedel 1987) auch getriebene Kraft.

Im - auf den ersten Blick völlig unverständlich harten - Kontrast zu den hier nur angedeuteten Wirkungen der Mathematik steht ihr - universitäres - Selbstbild als Muster einer reinen, abgewandten Wissenschaft, wie es beispielhaft von E. Nagel und J.R. Newman umrissen wird: "Es wurde deutlich, dass die Mathematik schlechthin jene Disziplin ist, die die Folgerungen zieht, die von einem vorliegenden Axiomen- oder Postulatensystem logisch impliziert werden. Tatsächlich erkannte man, dass die Gültigkeit einer mathematischen Ableitung von einer speziellen Bedeutung der in den Postulaten benutzten Zeichen oder Ausdrücken in keiner Weise abhängt ... Wir wiederholen, dass sich der reine Mathematiker ... nicht mit der Frage befasst, ob die festgesetzten Postulate oder die abgeleiteten Folgerungen wahr sind, sondern einzig damit, ob die behaupteten Folgesätze tatsächlich aus den ursprünglichen Festsetzungen logisch notwendig folgen." (Nagel, Newman 1964, S. 17f.). Ähnlich hatte schon B. Russell im Jahre 1901 formuliert: "Die reine Mathematik besteht lediglich aus Behauptungen, die besagen, dass der und der Satz zutrifft, wenn für irgendetwas die und die Aussage gilt. Wesentlich ist, dass gar nicht erst erörtert wird, ob die erste Aussage tatsächlich wahr ist, und dass auch nicht erwähnt wird, was das Etwas ist, wofür die vermutlich gilt... In der reinen Mathematik gehen wir von bestimmten Ableitungsregeln aus, nach denen wir folgern können, dass, wenn ein Satz wahr ist, dann auch ein zweiter Satz gilt. Diese Ableitungsregeln bilden den Hauptteil der

Grundsätze formaler Logik. Wir wählen also irgendeine Hypothese, die uns amüsant erscheint, und leiten die entsprechenden Folgerungen ab. Gilt diese Hypothese für irgendetwas und nicht für eine oder mehrere Einzeltatsachen, dann stellen unsere Deduktionen Mathematik dar. Als Mathematik können wir also das Gebiet bezeichnen, auf dem wir nie wissen, wovon wir eigentlich reden und ob das, was wir sagen, auch wahr ist." (Russell 1901, S. 8f.)

In diesen beiden Aussagen wird pointiert, was das formal-axiomatische Selbstverständnis der reinen Mathematik ausmacht. Dieses Selbstverständnis steht nur scheinbar im Widerspruch dazu, dass derzeit ein relevanter Prozentsatz (Vgl.: Booß, Hoyrup 1984) der Mathematiker im Bereich der militärischen Forschung arbeitet: Die Zielgenauigkeit der Pershing-Rakete ist ebenso wie die Steuerung der cruise missile oder das SDI-Konzept auch ein Produkt mathematischer Technologie. Mathematik als Technologie bedeutet eben, dass auch die reinste Mathematik einen technologischen Aspekt hat oder zumindest haben kann.

Kapitel 8: Zwischenbilanz

Wir meinen, es ist an der Zeit für ein (Zwischen-)Fazit: Was haben wir bisher thematisiert? Was fehlt noch?

Selbstverständlich laden wir Sie ein, an dieser Stelle auch Ihre Zwischenbilanz zu ziehen. Sind Sie unserer Argumentation gefolgt? Haben Sie etwas für Ihren Unterricht gelernt und auch schon ausprobiert? Wir freuen uns sehr, wenn Sie uns Ihre Zwischenbilanz, Ihre Meinung und Ihre Erfahrungen mitteilen. Nicht zuletzt ist auch Zwischenbilanz für den Lernerfolg Ihrer Schülerinnen und Schüler wichtig. Wie können Sie überprüfen, ob sie etwas über Modellieren gelernt haben, ohne gleich ein ganzes neues Projekt zu starten?

Unsere Zwischenbilanz folgt der Struktur des Buches. Ausgehend von ersten Antworten auf typische Fragen zu Beginn (Was ist überhaupt Modellieren im realitätsbezogenen Mathematikunterricht? Weshalb soll ich als Mathematiklehrer oder Mathematiklehrerin realitätsbezogenen Mathematikunterricht halten? Wie geht das? Was kann ich tun, wenn meine Schülerinnen und Schüler das nicht können oder wollen? Wie fange ich einfach an? Was sind Beispiele für größere Unterrichtseinheiten? Wo finde ich mehr Beispiele?) haben wir unseren didaktischen Prinzipien folgend versucht, zunächst etwas für Ihre Motivation zu tun. Dazu gibt es das interaktives „Handy“-Beispiel, einen Anschub an Motivation aufgrund von Resultaten empirischer Forschung, die unsere Argumente für realitätsbezogenen Mathematikunterricht stützen und – für Schule immer wichtig – den Verweis auf die gesammelten Wünsche der Regierungen, die sich in Form von Lehrplänen, Kompetenzkatalogen und vielen entsprechenden Forderungen an den Mathematikunterricht niederschlagen.

Wer sich überzeugen und motivieren lässt, braucht einen guten Start bei den ersten eigenen Gehversuchen. Kleine Schritte sind i. d. R. immer einfacher als große Schritte! Deshalb beginnen wir in diesem Buch mit ersten Schritten sehr behutsam und vorsichtig, steigern uns dann aber langsam von kleineren zu größeren Projekten um schließlich einen Blick auf das zu riskieren, wie Profis bzw. Berufsmodellieren arbeiten.

Wenn Sie nun zumindest ein Stück weit bereit und in der Lage sind, realitätsbezogenen Mathematikunterricht durchzuführen, werden Sie wie alle anderen Lehrerinnen und Lehrer vor Ihnen in derselben Situation schnell zur Einsicht gelangen, dass diese Art von Unterricht nicht nur zu besonderen Erfolgserlebnissen führt, sondern auch zu vermehrter Arbeit für die Unterrichtsvorbereitung. Je weiter Sie sich vom Schulbuch und anderen schon vorbereiteten Unterlagen für den Unterricht entfernen, desto mehr Arbeitszeit müssen Sie für die Unterrichtsvorbereitung investieren. Wenn es sich zudem um eine ungewohnte Art von Unterricht handelt, hilft auch die Routine in der Unterrichtsvorbereitung weniger als bei mehr vertrauten Arten von Mathematikunterricht. Müssen wir nun ein schlechtes Gewissen haben, weil wir Ihnen eine Art zu unterrichten nahe gelegt haben, die Ihnen mehr Arbeit macht als „normaler“ Unterricht? Wir meinen: Nein! Weshalb? Sie werden durch Erfolgserlebnisse im Unterricht und positive Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler belohnt. Wir möchten und können Ihnen aber dabei helfen, die notwendige Arbeit zu reduzieren. Dazu geben wir Ihnen drei Tipps, die wir allerdings zunächst ein wenig erläutern müssen. Wir wissen nicht, wie Sie bisher gearbeitet und Unterricht vorbereitet haben. Deshalb kann es sein, dass wir Ihnen nun etwas raten, was Sie ohnehin schon seit langem tun. In diesem Fall bitten wir Sie, einfach die Tipps als Bestätigung Ihrer Praxis aufzufassen. Wir schreiben diese Tipps nicht, um zu behaupten, dass wir besser als Sie wissen, wie Sie richtig oder effizient arbeiten, sondern um jenen Kolleginnen und Kollegen zu helfen, die gern realitätsorientiert unterrichten, sich aber dadurch überlastet fühlen.

Tipps zur effizienten Vorbereitung realitätsbezogenen Mathematikunterrichts

Tipp 1 *betrifft den Umfang oder die Vollständigkeit der Vorbereitung*. Wir kennen viele Lehrerinnen und Lehrer, für die es Ehrensache ist, sich im Zuge der Unterrichtsvorbereitung ganz genau zu überlegen, welche Inhalte in einer Stunde vorkommen können und welche Lösungen für die gestellten Aufgaben gelten. Das klingt nach mehr Aufwand als es tatsächlich ist, wenn in der vorzubereitenden Stunde auf der Grundlage eines Schulbuches und eines Buches mit den Lösungen der Aufgaben aus dem Schulbuch Aufgaben geübt werden sollen. Im Unterschied zu einer solchen Stunde steigt der Aufwand erheblich, wenn offener realitätsbezogener Mathematikunterricht geplant werden soll, in dem die Schülerinnen und Schüler mitbestimmen, ob ein weiterer Modellierungsversuch mit neuen Annahmen oder zusätzlichen Daten gestartet werden soll. Wenn die Lehrkraft in einem solchen Unterricht alle möglichen Fragen und Ideen zur Modellierung vorausplanen und Ergebnisse von Berechnungen schon vorher ausgerechnet haben will, steigt der Arbeitsaufwand kaum überschaubar stark an. Aus unserer Sicht kann eine sinnvolle Konsequenz daraus bestehen, die Art der Vorbereitung und des Unterrichts zu ändern. Was meinen wir damit? Die Lehrkraft konzentriert ihre Vorbereitung auf die grundsätzliche Vorüberlegung und arbeitet dann im Projekt mit der Klasse zusammen. Dadurch ändert sich die Rolle der Lehrkraft, sie ist nicht mehr zugleich für alle inhaltlichen und organisatorischen Aspekte verantwortlich, muss nicht alle Fragen sofort richtig und vollständig beantworten und konzentriert sich darauf, den Schülerinnen und Schülern zu helfen, selbst die Fragen zu stellen und zu beantworten und die dazu notwendigen Daten zu beschaffen.

Ausgangspunkt der Unterrichtsvorbereitung ist also die Überlegung „Passt diese Fragestellung aus der Realität prinzipiell in diese Klasse?“. Dabei stehen zwei Aspekte im Vordergrund, der thematische und der curriculare Bezug: die zur Modellierung notwendige Mathematik soll zum Stoff für diese Klasse gehören. Die Einschätzung der Motivationskraft eines Themas aus der Realität ist bisweilen schwierig. Wir nehmen an, dass die meisten Schülerinnen und Schüler ein Handy verwenden und möglichst wenig dafür zahlen wollen. Also schließen wir daraus, dass Handytarife ein für sie ein objektiv relevantes und motivierendes Thema sind. Es nicht schwer, ihnen diese Relevanz zu verdeutlichen, damit sie als Subjekte von der Relevanz für Sie persönlich überzeugt sind. Trifft diese Annahme auch für Stromtarife zu? Wir wissen es nicht so genau. Für uns ist es ein relevantes Thema, weil wir laufend Stromrechnungen bezahlen. Gelingt es uns zu Beginn einer Unterrichtssequenz zu Stromtarifen, den Schülerinnen und Schülern zu verdeutlichen, dass sie selbst bald Stromrechnungen zahlen werden und deshalb das Thema für sie wichtig ist? Oder versuchen wir, sie dadurch zu motivieren, dass wir sie bitten, jemandem zu helfen, sich im Tarifdschungel zurechtzufinden? Dazu kann eine kleine Geschichte als Rahmen hilfreich sein, etwa die von der netten Nachbarin, Oma Müller, die ein Angebot von einem neuen Stromanbieter bekommen hat, dass sie nicht versteht. Was rät ihr die Schulklasse: Soll sie den Anbieter wechseln?

Der Lehrplanbezug bzw. die Frage nach den mathematischen Mitteln, die für die Behandlung eines realitätsnahen Themas notwendig sind, ist offensichtlich ein ganz wichtiger Bestandteil der Unterrichtsvorbereitung durch die Lehrkraft. An extremen Beispielen wird das besonders klar: Das Nachrechnen eines Kassenbons oder einer Rechnung aus dem Gasthaus erfordert Additionen von Dezimalzahlen mit zwei Stellen hinter dem Komma, bei Tarifen geht es hauptsächlich um Lineare Funktionen und Gleichungen und zur Optimierung des Profils von Winterreifen für Automobile braucht man Mathematik, die deutlich über dem Schulniveau steht. In solch extremen Fällen ist es nicht schwer, eine ungefähre Zuordnung zur passenden Schulstufe zu finden. Viel schwieriger sind die Zuordnungen in Fällen, in denen der mathematische Inhalt zweier möglicher Projektthemen ähnlich ist oder die zur Modellierung nötige Mathematik in den Lehrplänen verschiedenen Schulstufen zugeordnet wird (oder nicht: der zeitlich frühere Teil ist einfach „Wiederholung“). Diese Entscheidung fällt ebenso wie die gesamte Vorbereitungsarbeit wesentlich leichter, wenn bereits Erfahrungen mit der Behandlung dieser Thematik im Mathematikunterricht vorliegen. Darum geht es im folgend Tipp.

***Tipp 2** ist Ihnen sicher schon bekannt: Nutzen Sie Literatur und Internetquellen, Erfahrungen anderer Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer zur Erleichterung der Unterrichtsvorbereitung!* Wir meinen diesen Tipp allerdings etwas spezifischer als üblich. Selbstverständlich gilt das Motto „Lesen bildet“ auch für die Thematik realitätsbezogener Mathematikunterricht ganz allgemein. Für Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer, die solche Art von Unterricht planen, kann die Nutzung von Erfahrungen und Texten anderer jedoch besonders hilfreich sein. Zum ersten gibt es z.B. in der Zeitschrift „mathematik lehren“ vom Friedrich Verlag (http://www.friedrich-verlag.de/go/2F5184ED83F94EC4A962249DFD648EA7), anderen mathematikdidaktischen Zeitschriften, in den Büchern von ISTRON (http://istron.uni-koblenz.de/istron_web/) und auch bei der MUED (www.mued.de) eine sehr große Anzahl von fertig konzipierten Vorschlägen für realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schon ein wenig stöbern (Titel und Kurzzusammenfassung) reicht in der Regel, um genau für Ihre Klasse und den gerade aktuellen Stoff mehrere Vorschläge zu finden. Es ist wesentlich einfacher und Zeit sparend, einen schon publizierten Unterrichtsvorschlag für Ihre Klasse auszuwählen und für die spezifische Situation anzupassen, als selbst etwas Neues zu entwickeln. „Anpassen" klingt schon wieder nach extra Arbeit, muss es aber nicht sein. Handytarife werden laufend verändert. Viel Motivationskraft geht verloren, wenn eine Unterrichtseinheit dazu mit Tarifen aus dem Jahre X durchgeführt wird, nur weil die Vorlage zufällig aus diesem Jahre X stammt. Aktuelle Handytarife müssen aber nicht von der Lehrkraft mühsam gesucht und für den Unterricht aufgearbeitet werden. Diese Arbeit kann und soll Teil des eigentlichen Projektes sein und von den Schülerinnen und Schülern selbst geplant und durchgeführt werden.

Tipp 3 *betrifft die Kooperation mit anderen Lehrerinnen und Lehrern.* Eine Kooperation kann in verschiedenen Richtungen sinnvoll sein, einmal mit anderen Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern von anderen Schulen und zum anderen mit Lehrerinnen und Lehrern anderer Unterrichtsgegenstände bzw. Fächer an der eigenen Schule. Wir haben aus vielen Schulen gehört, dass es nicht immer einfach und sogar z.T. völlig unüblich ist, an einer Schule zu kooperieren und hören genauso aus anderen Schulen Beispiele für gelungene Zusammenarbeit, von denen Lehrerinnen und Lehrern mit großer Begeisterung berichten. Wir kennen die Situation an Ihrer Schule nicht und können deshalb keinen persönlichen Rat geben. Wir können aber aus den positiven Erfolgsberichten einen Aspekt aufschreiben, der immer wieder herausgeklungen ist: Wir haben einfach mit einem konkreten kleinen Projekt angefangen… Dann wuchs mit der gemeinsamen Erfahrungen auch die Qualität der Kooperation.

Fast nur Positives haben wir hingegen über die schulübergreifende und fachspezifische Kooperation gehört. Gerade jene Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer, die sich an ihrer Schule isoliert fühlten, weil sie nach ihrer eigenen Einschätzung die einzigen an ihrer Schule waren, die den Mathematikunterricht verbessern wollten, haben es sehr oft als sehr positiv erlebt, genau solche Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer von anderen Schulen zu treffen, denen es ganz ähnlich geht. Wie finden Sie solche Kolleginnen oder Kollegen? Wir nennen zwei gute Möglichkeiten, einmal Veranstaltungen zur Lehrerfortbildung (dort treffen sich oft die Engagierteren aus einer Region) und die Mitarbeit in regionalen Arbeitsgemeinschaften.

Wie finde ich selbst neue Beispiele? Wie finden meine Schülerinnen und Schüler Beispiele?

Weiße Flecken auf der Landkarte haben viele Menschen zu großen Anstrengungen, zu weiten Reisen ins Unbekannte motiviert. Auch kleinere oder weniger bedeutende Entdeckungen als die der Nilquellen haben ihren Reiz. Was aber können Schülerinnen und Schüler oder auch Sie als Lehrkraft im Mathematikunterricht an der Schule neu entdecken? Alle im Mathematikunterricht behandelten Definitionen und Sätze sind seit langer Zeit bekannt und bewiesen. Damit kommen wir zu einem großen Vorteil realitätsbezogenen Mathematikunterrichts: Hier können Schülerinnen und Schüler oder auch Sie als Lehrkraft tatsächlich etwas neu entdecken. Jedes Modell einer realen Situation ist eine neue Schöpfung, eine Entdeckung oder Konstruktion von etwas Neuem, bisher so nicht Bekanntem. Selbst wenn jemand (oder gar 10000 andere Menschen) Handytarife schon ähnlich modelliert hat, gibt es mit einiger Sicherheit ganz besondere Aspekte in Ihrem Modell, die in anderen Modellen nicht oder anders enthalten sind. Für den Mathematikunterricht eröffnet sich durch das selbstständige Modellieren eine völlig neue Erlebnisdimension; es geht nicht wie üblich um das Nachvollziehen von schon vorhandenem Wissen und um das Üben des richtigen Umgangs mit längst bekannten Algorithmen, sondern um das kreative Erfassen und Gestalten der Welt. Historisch war das immer ein wichtiger Aspekt der Mathematik. Weil aber die Mathematikforschung längst unerreichbar weit über das Niveau der Mathematik in der Schule gestiegen ist, kommt dieser Aspekt in der Regel in der Schule nicht vor. Mathematik wirkt deshalb in der Schule eigentlich zu Unrecht so starr, festgefügt und wenig attraktiv.

Wenn nun der Wunsch geweckt ist, Mathematik einmal anders zu erleben, selbst etwas zu modellieren, stellt sich die Frage: Wie finde ich bzw. wir finden wir als Schulklasse ein Thema? Wie bei den ersten Tipps weisen wir darauf hin, dass Sie vielleicht ohnehin schon so verfahren. Falls nicht: Lesen Sie Zeitungen und Zeitschriften oder Beiträge im Internet auch auf mit dem suchenden Blick für aktuelle und motivierende Unterrichtsthemen? Sehr viele Artikel enthalten mathematische Argumente, etwa Grafiken oder andere Darstellungen von Statistiken oder mathematischen Modellierungen, um ihre Position zu untermauern. Oft geben insbesondere die Grafiken Anlass zu kritischen Fragen, weil Koordinaten-Achsen gekürzt werden, ganz spezielle Ausschnitte aus allen Daten gewählt werden etc. Da mit den Beiträgen oft für oder gegen persönlich, politisch oder wirtschaftlich wichtige Entscheidungen geworben wird, ist es für die Schülerinnen und Schüler sehr wichtig zu lernen, solche Texte „richtig“ zu verstehen. Wenn ich mit mathematischen Methoden analysieren kann, welche Aussage durch eine bestimmte Gestaltung einer Grafik suggeriert werden soll, verstehe ich den Text viel besser. Hier hilft Mathematik unmittelbar bei der Bildung zum kritischen Bürger bzw. zur kritischen Bürgerin. Als passende Literatur dazu empfehlen Herget & Scholz (1998). – wobei heute natürlich die aktuellen Beispiele von damals nicht mehr so aktuell sind.

Wir nehmen hier als Beispiel einen Text aus der ZEIT, in dem schon aus dem Titel hervorgeht, wie sehr die Ergebnisse einer Modellbildung Einfluss auf das Ergebnis der Berechnung und damit auf die politische Entscheidung haben. Wir greifen willkürlich drei aktuelle Beispiele heraus, die aus unserer Sicht exemplarisch sind, weil die jeweilige Position mit Argumenten aus mathematischen Modellen gestützt wird. Erstes Beispiel sind Pläne für eine Maut auf deutschen Autobahnen. Ein für den Mathematikunterricht brauchbarer Artikel dazu findet sich in der ZEIT Nr. 46 (2014): PKW-Maut: Wer liegt daneben? Verkehrsminister und ADAC kalkulieren die "Ausländermaut" völlig unterschiedlich. Wie ist der Minister bloß auf seine Zahlen gekommen? von Dietmar H. Lamparter und Felix Rohrbeck (http://www.zeit.de/2014/46/pkw-maut-adac-dobrindt-kosten). Im Artikel wird gut dargestellt, wie sehr die erwarteten Einnahmen von Modellannahmen abhängen. Dazu wird sogar noch auf ein ausführliches Gutachten „des renommierten Münchner

Verkehrswissenschaftlers Ralf Ratzenberger" (zu finden auf der Website des ADAC, Ebd.) verwiesen.

Ein zweites Beispiel, das zur Analyse im Mathematikunterricht einlädt, ist der Mineralölsteuerrechner des ÖAMTC (http://www.oeamtc.at/portal/moest-rechner+2500++1614802). Hier darf probeweise an der Steuerschraube gedreht werden – und der Rechner zeigt ganz im Sinne des Automobilfahrerklubs, dass am Ende das Budget doch nicht von Steuererhöhungen profitiert. Dabei treten bei den Erhöhungen auf den ersten Blick rätselhafte Sprünge in der Bewegung der dargestellten Balken auf, die auf interessante Modellannahmen hindeuten.

Auch das dritte hier angedeutete Beispiel beruht auf einem Text aus einer Zeitung: „Die Tricks der Klimapolitiker" (DIE ZEIT Nr. 49/2014, S. 41, http://www.zeit.de/2014/49/klimakonferenz-klimagipfel-lima). Im Beitrag wird an Hand von verschiedenen Grafiken erläutert, wie sich Änderungen in den Basisannahmen für die Modellierung der Klimaprognose auswirken. Obwohl die eigene Erstellung und Berechnung von globalen Klimamodellen weit über die Möglichkeiten einer Schulklasse hinausgehen, kann an einem solchen Text sehr schön erkannt und besprochen werden, wie unterschiedliche Modellansätze sich auswirken.

Eine große Gruppe von Beispielen erschließt sich durch den Begriff „Fermi – Aufgaben" (siehe etwa http://de.wikipedia.org/wiki/Fermi-Problem). Dazu lassen sich Internet mittlerweile sehr viele schöne Vorschläge für den Mathematikunterricht finden.

Den Weg zu einem etwas anderen, aber sehr produktiven Zugang hat uns das irische Projekt „Maths Eyes" eröffnet (http://www.haveyougotmathseyes.com). Wir haben in Linz und Koblenz die Idee aufgegriffen und in eigene Wettbewerbe umgesetzt (http://www.jku.at/idm/content/e83438/e209929 sowie http://matheyes.uni-koblenz.de/de/). Wir verzichten an dieser Stelle darauf, das Buch mit den vielen Bildern von schönen Wettbewerbsbeiträgen zu füllen und beschränken und auf ein paar Notizen zu den Hintergrundüberlegungen.

Die Welt mit mathematischen Augen sehen

Wenn ein Mensch die Welt mit mathematischen Augen sieht, kann das auf sein Verhältnis zur Mathematik in zwei Richtungen wirken. In der einen Richtung kann dieser Mensch in der Welt bestimmte mathematische Objekte wieder erkennen, etwa Dreiecke oder Vierecke oder andere geometrische Formen. Viele technische Produkte, aber auch Pflanzen und Tiere sind sichtbar aus solchen Formen zusammengesetzt.

In der anderen Richtung kann eine auffällige Form, etwa ein Muster in einem Gegenstand oder eine Struktur einer Pflanze, Neugier und Interesse auslösen. Hat etwa dieser Kristall ausschließlich sechseckige Strukturen? Woran liegt das? Aus der engen Verbindung von Naturwissenschaft und Technik entsteht dann schnell die Frage: Können wir das Wachsen eines Kristalls so beeinflussen, dass eine gewünschte Struktur entsteht, etwa ein Chip mit integrierten elektronischen Schaltungen? Können wir daraus einen Industriediamanten wachsen lassen? Die Welt mit mathematischen Augen zu sehen, soll aber nicht nur eine interessante Perspektive auf die Welt ermöglichen und das Tor zu vielen nützlichen Technologien eröffnen, sondern auch Freude bereiten. Die Bilder der Kinder und Jugendlichen, die an diesem Wettbewerb teilgenommen haben, zeigen Schülerinnen und Schüler, denen es ganz offensichtlich Freude gemacht hat, sich auf diese - ungewohnte - Art mit Mathematik zu beschäftigen. Freude am Mathematikunterricht ist aber leider im Schulalltag nicht so häufig, wie es wünschenswert wäre.

Wie sehen wir die Welt? Mit den Augen! Das ist aber nur ein Teil der Wahrheit. Die Augen nehmen optische Informationen (hell/dunkel, Farbe, Kontraste etc.) wahr und übersetzen sie in Signale, die durch die Sehnerven ins Gehirn gehen. Dort werden sie ausgewertet. Das eigentliche Sehen, das Interpretieren der von den Augen aufgenommen optischen Informationen, findet im Gehirn statt. Wie geht das? Zum Verstehen dieses sehr komplexen und noch nicht vollständig erforschten Vorgangs helfen einige recht einfache Überlegungen. Zunächst fasst das Gehirn einzelne Daten, also von den Augen in Nervensignale übersetzte optische Reize, zu Gruppen zusammen und setzt sie mit vorhandenen, im Gehirn gespeicherten Mustern in Beziehung: Das ist ein Ball, ein Mensch, ein Haus, ein Auto usw. Wenn ein Dreieck, eine Spirale oder eine andere mathematische Struktur gesehen wird, muss demnach ein Urbild, ein Vergleichsmuster bereits im Gehirn vorhanden sein.

Dann sortiert das Gehirn „unwichtige“ Informationen aus. Was ist „unwichtig“? Das kann ein parkendes Auto (= keine Gefahr) sein, ein Baum, der nicht auf unserem Weg steht, oder ein uns unbekannter Mensch unter vielen auf der anderen Straßenseite (= keine Bedeutung). Eine andere Gruppe von Informationen ist zwar wichtig, wird uns aber nicht bewusst. Ein Beispiel dafür solche sind optische Eindrücke über den Weg, den wir gerade gehen wollen. Ist er eben? Gibt es Stufen oder Löcher? Liegt etwas auf dem Weg? Diese Informationen werden vom Gehirn verarbeitet, die Muskeln und Sehnen werden entsprechend gesteuert. Zum Glück brauchen wir uns um die Koordination nicht bewusst kümmern - das Bewusstsein die Aufmerksamkeit wären hoffnungslos überlastet.

Wenn wir in einer Fußgängerzone oder im Kaufhaus gehen, bewegen wir uns meist ohne darüber nachzudenken so, dass wir niemandem auf den Fuß treten oder mit jemandem zusammenstoßen. Die unbewusste, routinemäßige Verarbeitung von Informationen kann auch gelernt oder antrainiert werden; Ski fahren oder Auto fahren sind Beispiele dafür. Eine routinierte Autofahrerin hält die Spur, sieht ein Bremslicht aufleuchten und bewegt den Fuß auf die Bremse, ohne darüber nachzudenken. Ebenso wird ein akustisches Signal, erzeugt durch eine bestimmte Drehzahl des Motors, vom Gehirn automatisch übersetzt in „die Geschwindigkeit passt in etwa (= nichts ändern) oder „ist zu laut“ (=> ich muss mal bewusst auf den Tacho schauen).

Für das Lernen und das bewusste und zielgerichtete Anwenden von etwas Gelerntem sind offenbar jene Informationen besonders wichtig, die all diese Filter passieren und tatsächlich bewusst wahrgenommen werden. Interesse und Motivation wirken dabei als zusätzliche Filter oder Schleuse. Was uns nicht interessiert nehmen wir kaum wahr, wenn wir es nicht müssen. Eine Stopptafel am Straßenrand müssen wir beachten, auch wenn sie uns nicht interessiert. Beim Lernen hängt das Interesse und damit der Filter für die Aufmerksamkeit stark von der Motivation ab: Wenn nur die Angst vor einer schlechten Note zum Aufpassen motiviert, sind die

Lernerfolge geringer, als wenn das Interesse von innen kommt, wenn wir etwas wirklich wissen wollen. Selbstverständlich lernen wir alles schneller und nachhaltiger, wenn wir es aus innerer Motivation lernen wollen.

Genau um ein solches Interesse an Mathematik ging es bei diesem Wettbewerb. Wer sein Augenmerk mit Absicht darauf richtet, in der Welt rundherum Mathematik zu entdecken, sieht die Welt auf einmal mit anderen Augen - also mit einer anderen Fokussierung des Interesses als üblich. Wer dann tatsächlich überall Mathematik entdeckt, braucht nicht zu fragen: Wozu lernen wir denn das? - Es ist ja offen**sichtlich**, dass Mathematik überall vorkommt. Dann liegt auch die Schlussfolgerung nahe, dass es in dieser Welt sehr nützlich sein kann, Mathematik zu lernen und zu verstehen.

Die Welt mit Hilfe der Mathematik besser verstehen und verändern

Das Gehirn erkennt etwas Mathematisches in den Informationen wieder, die von den Augen aufgenommen werden, wenn es schon etwas über Mathematik gelernt hat. Ein Sechseck wird in einer Bienenwabe (wieder)erkannt, wenn es aus dem Geometrieunterricht bekannt ist. Geht es auch anders herum? Ein nachdenklicher Blick auf eine Bienenwabe kann neugierig machen und zu der Frage führen: Weshalb bauen die Bienen etwas mit dieser Form? Wären Dreiecke oder Quadrate oder Kreise nicht einfacher und besser? Eine genauere mathematische Analyse ergibt, dass Sechsecke in gewisser Hinsicht optimal sind: Sie bilden mit minimalem Materialwand eine stabile Struktur.

Ein anderes Beispiel aus dem Alltag ist Bekleidung. Wer schon einmal versucht hat, aus einer Stoffbahn einen einfachen Rock zu schneidern, hat auch erfahren, dass das nicht ganz einfach ist. Welche Form muss in der Ebene (der Stoffbahn) ausgeschnitten werden, damit im Raum ein Rock daraus wird? Mathematisch ist das der Mantel eines Kegelstumpfs. So wird das beim Schneidern aber nicht mathematisiert; stattdessen werden Schnittmuster verwendet, die z.B. in Zeitschriften zu finden sind. Wer aber erstellt komplizierte Schnittmuster von Abendkleidern oder

Trachtenanzügen? Wie in sehr vielen Fällen in Handwerk und Technik wird Mathematik hier versteckt eingesetzt; sie wird verwendet, ohne explizit benannt und bekannt zu sein. Wer aber nicht nur nachmachen und anwenden will, kann dabei mit bewusstem Einsatz von Mathematik erstaunliche Erfolge erzielen. Denn alle Neuen Technologien sind im Kern mathematische Technologien.

Zwischenbilanz für den Lernerfolg Ihrer Schülerinnen und Schüler

Die Idee, nach einem Stück eines Weges inne zu halten, zurückzuschauen und zu überlegen, wie der Weg bisher war und wie es weiter gehen soll, ist aus unserer Sicht prinzipiell gut. Deshalb empfehlen wir in diesem Kapitel nicht nur Ihnen, sondern auch Ihren Schülerinnen und Schülern, immer wieder einmal eine Zwischenbilanz zu ziehen: Was haben wir bisher zu diesem Thema gelernt? Was interessiert und darüber hinaus? Was möchten wir weiter tun?

Die zentrale Hoffnung und Erwartung im Zusammenhang mit realitätsbezogenem Mathematikunterricht ist die *nachhaltige* Kompetenzsteigerung. Das soll aber keinesfalls ein Argument dafür sein, dass sich kurzfristig positive Lernerfolge weder zeigen noch testen lassen - im Gegenteil! Offensichtlich zeigt sich die Kompetenz zum eigenständigen mathematischen Modellieren am besten im eigenständigen Modellieren selbst. Auf der Suche nach weniger zeitaufwendigen Testmethoden bzw. Wegen, eine Zwischenbilanz zu ziehen, sind wir auf einen Vorschlag gestoßen, der im Projekt LEMAMOP (=Lerngelegenheiten für Mathematisches Argumentieren, Modellieren und Problemlösen) entwickelt und während der ISTRON Tagung im November 2014 in Koblenz vorgetragen wurde. Dabei geht es ausdrücklich nicht darum, etwas nachzurechnen bzw. eine vorgelegte Rechnung zu überprüfen, sondern um Überlegungen zur Modellierung. Hier das erste Beispiel:

Beispiele für Trainingsaufgaben Klasse 11 - Validieren

Aufgabe 3 **Rote Welle**

Moritz muss auf seinem Weg zur Schule drei Ampeln passieren. Die Phasen sehen wie folgt aus:

1. Ampel: 30s Grün, 50s Rot
2. Ampel: 20s Grün, 30s Rot
3. Ampel: 15s Grün, 30s Rot

Wenn berechnet werden soll, wie groß die Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Ereignisse sind (z.B. keinmal Rot, immer Rot, nur einmal Rot, ...), wird die Situation häufig mit Hilfe eines dreistufigen Baumdiagramms modelliert (s. rechts).

Erläutern Sie, welche Aspekte der Realsituation bei dieser Modellierung vernachlässigt werden.
Beurteilen Sie, ob die Modellierung dennoch angemessen sein kann.

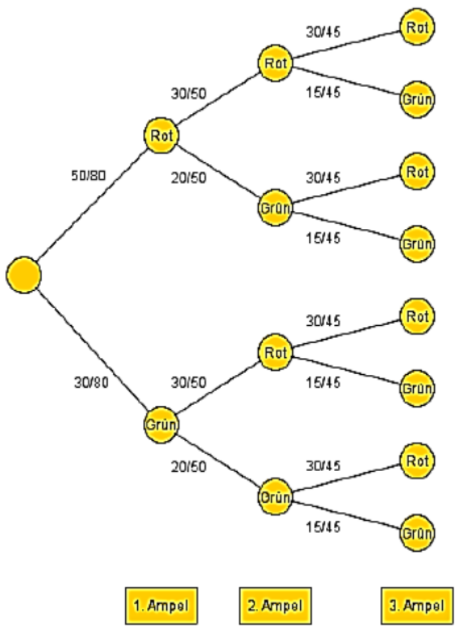


Abbildung 25: Aufgabe zur Überprüfung der Modellierungskompetenz 1
Quelle: Vortragsfolien Regina Bruder & Gerd Hinrichs, S. 22 (freundlicher Weise zur Verfügung gestellt von Prof. Dr. R. Bruder)

Diese Aufgabenstellung trifft aus unserer Sicht sehr genau den wichtigen Aspekt „Realitätsbezug“, der für die langfristige Wirkung des Mathematikunterrichts besonders zentral ist. Wer als Schülerin oder Schüler des Öfteren im Mathematikunterricht mit solchen Aufgaben betraut wird, fragt hinterher nicht mehr, welchen Sinn der Unterricht hat – der Bezug zum Ziel „fürs Leben Lernen“ ist offensichtlich.

Nun sind wieder Sie an der Reihe: Wie würden Sie diese Aufgabe lösen bzw. was würden Sie als Lösung mit voller Punktzahl bewerten?

Das folgende Beispiel wird oft als Witz über schlechten Mathematikunterricht erzählt, wenn die Fragestellung übersteigert wird: Wie viele Maler braucht man, um die Wohnung in einer Sekunde zu streichen?

Aufgabe 18 **Fleißige Handwerker** (*, +, A)

Drei Maler streichen eine Neubauwohnung in 2 Tagen. Wie lange würde das dauern, wenn 10 Maler die Wohnung streichen?

Konstantin nimmt an, dass eine antiproportionale Zuordnung vorliegt: Je mehr Maler die Wände streichen, desto weniger Zeit benötigen sie dafür.

Er rechnet also:

Anzahl Maler	benötigte Zeit in Arbeitstagen
3	2
1	6
10	0,6

Dann schlussfolgert er, dass 10 Maler 0,6 Arbeitstage benötigen würden, also in ca. 5 Stunden mit der Arbeit fertig wären.

Beurteilen Sie die Angemessenheit der Modellierung.

Abbildung 26: Aufgabe zur Überprüfung der Modellierungskompetenz 2
Quelle: Vortragsfolien Regina Bruder & Gerd Hinrichs, S. 23 (freundlicher Weise zur Verfügung gestellt von Prof. Dr. R. Bruder)

Hier ist die Fragestellung jedoch genau anders herum: Wie realitätsnah ist das Modell? Was würden Sie antworten bzw. als gute Antwort gut benoten?

Ausblick

Unsere Zwischenbilanz endet mit einem Ausblick auf weitere Themen zum Bereich realitätsbezogenen Mathematikunterricht. In diesem Buch haben wir – so unsere Zwischenbilanz – an vielen Stellen angedeutet, dass wir uns auf Überlegungen beziehen, die den theoretischen Hintergrund des (mathematischen) Modellierens ausleuchten. Wir haben aber bewusst bisher darauf verzichtet, diese Überlegungen ausführlich darzustellen, weil das der theoretische Hintergrund Thema eines anderen Buches ist. Was gehört aus unserer Sicht alles dazu? Wir beginnen mit philosophischen Ausgangspunkten des Modellierens als Weg zum Erkennen und Verändern der Welt. Wer „die Realität“ mathematisch modellieren sollte auch wenig von den Überlegungen zur Kenntnis nehmen, die in der Philosophie zur Frage angestellt wurden, was denn „die Realität" eigentlich ist und wie (bzw. in wie weit) sie überhaupt erkannt werden kann. Realitätsbezogener Mathematikunterricht stellt einige Anforderungen an Realität und Erkenntnis!

Auch ein zweiter wichtiger Bezug zur Philosophie soll genauer thematisiert werden: Alles, was wir tun oder nicht tun, hat Konsequenzen: Was bedeutet das für den Mathematikunterricht? Was antworten wir, wenn wir etwas modelliert haben und damit die Welt (wenn auch nur ein wenig) verändern, auf die Frage nach unserer Verantwortung für mögliche Konsequenzen? Die Frage nach der Verantwortung führt unmittelbar zur Ethik!

Ein anderer wichtiger Bestandteil des theoretischen Hintergrunds betrifft den Versuch, historisch zu erfassen, welche Bedeutung das Modellieren in der Mathematik und für die Mathematik hatte und hat. Daraus erwächst auch ein Teil der Bedeutung des mathematisch Modellierens bzw. des realitätsbezogener Mathematikunterrichts in der Schule.

Nicht zuletzt gehören auch theoretische Vertiefungen zu einigen besonderen Aspekten des Modellbildens, etwa zum Umgang mit Genauigkeit, dem Computereinsatz, sinnvollen Lösungshilfen und diesem Unterricht angemessener Unterrichtsmethodik.

Exkurs: Einige Überlegungen zum Modellieren

Wir beenden dieses Buch mit dem versprochenen Exkurs zum Modellieren. Vielleicht haben Sie sich gefragt, weshalb auf dem Buchtitel eine Grafik zum Modellieren gedruckt wurde, in der Mathematik auf den ersten Blick gar nicht vorkommt.

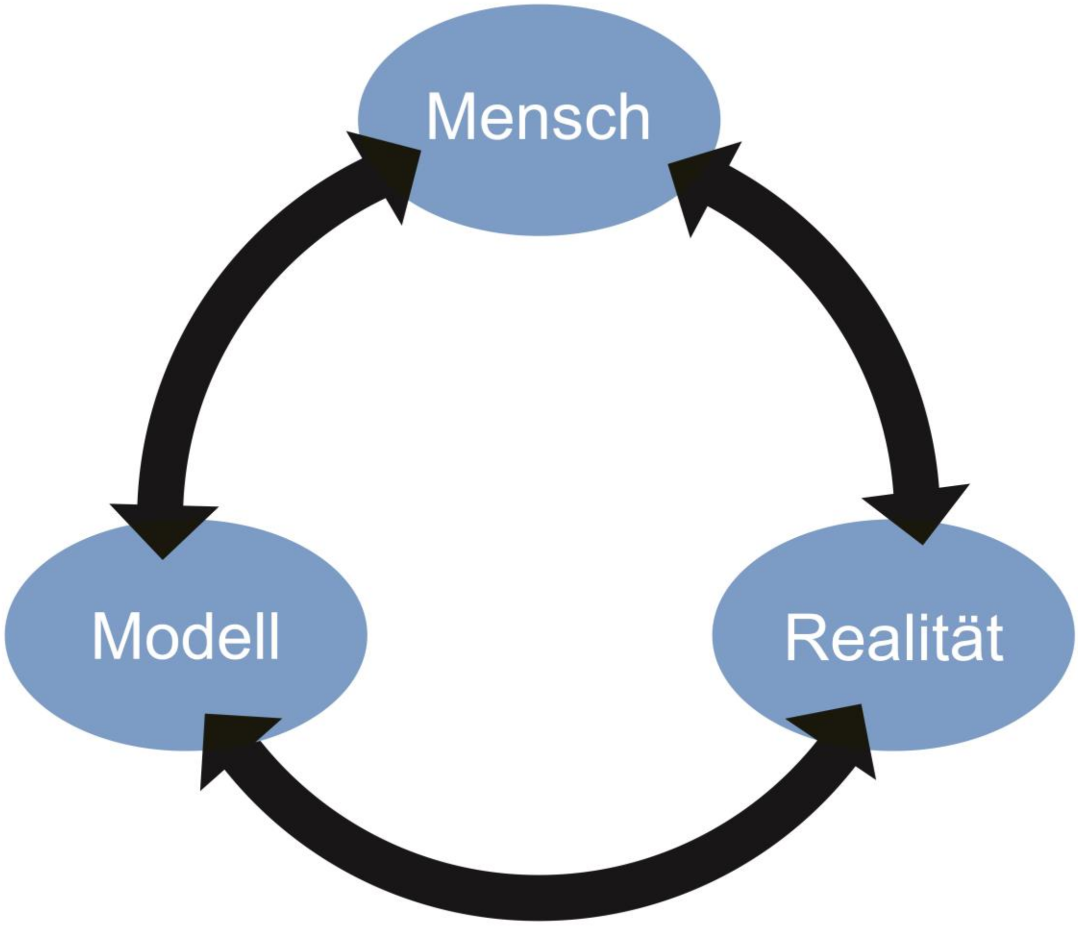


Abbildung 27: Modellierungskreislauf

Die zentrale Botschaft dieser Grafik ist, dass wir alle in unserem Umgang mit dem, was wir als Realität verstehen, ganz selbstverständlich Modelle verwenden. Die zweite zentrale Botschaft ist die jeweilige Wechselwirkung zwischen Mensch, Realität und Modell. Menschen kreieren Modelle und verändern – auch mit diesen Modellen - Realität; die Realität hat offenbar Einfluss auf Menschen und Modelle, mit denen sie beschrieben und verändert werden soll.

Dazu erwähnen wir zunächst ein paar erläuternde Beispiele. Wenn wir einkaufen gehen, verwenden wir Modelle von Objekten, Leuten und Verhaltensweisen, um z.B. einen Weg zu planen oder eine Einkaufsliste zu schreiben. Wenn wir den Bäcker um die Ecke besuchen wollen, denken wir nicht lange über den Weg dorthin nach, wir haben ihn – als Modell – im Kopf. Natürlich haben wir nicht den Weg selbst (als Materie, gleichsam den ganzen Bürgersteig mit Tonnen von Steinen etc.) im Kopf, sondern eine Vorstellung davon bzw. eine Erinnerung daran, wie er beim letzten Gang zum Bäcker war.

Wenn wir hingegen zum ersten Mal in ein neu gebautes Einkaufszentrum vor den Toren der Stadt fahren wollen, brauchen wir zur Planung vielleicht ein besser als solches erkennbares Modell, einen Stadtplan oder einen Plan des öffentlichen Nahverkehrs, um zu erkunden, wie wir dorthin gelangen. Wenn wir dort eine neue Hose kaufen wollen, haben wir vielleicht ein Modell davon im Kopf, ein Bild aus einer Werbung oder ein – menschliches – Modell, das eben diese Hose bei einer Vorführung (Modenschau) getragen hat, die dann im Werbefernsehen gezeigt wurde.

Im zweiten Schritt deuten wir an, in welchem – umfassenden – Sinn unsere Wahrnehmung der Realität (oder dessen, was wir dafür halten) durch vorhandene Modelle bestimmt wird. Wenn wir Spazieren gehen und Pflanzen und Tiere sehen, erkennen wir Laubbäume, Hecken, Blumen, Vögel, Insekten etc. mit Hilfe dessen, was wir schon vorher über solche Pflanzen und Tiere wissen. Mit anderen Worten: Wir haben biologische oder gärtnerische Kenntnisse (die mehr oder wenig richtig oder falsch sein können), um die Pflanze bzw. das Lebewesen vor unseren Augen einem Typ (von dem wir wiederum ein Modell, etwa eine mehr oder weniger korrekte Definition, im Kopf haben) zuzuordnen.

Auch wenn wir Kindern beim Spielen mit einem Ball zuschauen, helfen uns dabei naturwissenschaftliche Modelle, die wir mehr oder weniger gut verstanden haben und z.B. dazu nutzen, um eine Erwartung zu haben: Geht dieser Ball ins Tor? Erreicht das laufende Kind den Ball noch, bevor er in den Bach fällt oder auf die Straße rollt?

Im dritten Schritt erinnern wir daran, dass dieser Teil der Argumentation in der Philosophie längst bekannt ist, also hier nicht neu erfunden wurde. Sir Karl Popper schrieb in seiner im Jahre 1934 veröffentlichten „Logik der Forschung“: „Unsere Alltagssprache ist voll von Theorien; Beobachtung ist stets Beobachtung *im Lichte von Theorien*.“ (S. 31). Theorien bilden Modelle von Objekten, Verhaltensweisen, Organisationen etc.

Weshalb gibt es auch einen Pfeil in Gegenrichtung, also von den Modellen zu den Menschen? Offenbar wirken Modelle auf Menschen, sie haben Einfluss auf die Möglichkeit etwas richtig wahrzunehmen. Wer eine modellhafte Vorstellung von der Funktionsweise eines Autos, eines PC oder eines Virus hat, kann diese Vorstellung verwenden, um ein Auto oder einen PC besser zu nutzen oder sich vor einem Virus zu schützen. Gerade in der Medizin gibt es sehr viele Beispiele dafür, wie Modellvorstellungen von Organen, Bakterien oder Genen zu Fortschritten in der Diagnose und Therapie beitragen. Ebenso können solche Modelle dabei eine Rolle spielen, dass sich Menschen „gesünder“ verhalten.

Auch im Alltag und in der Gesellschaft haben Modelle erhebliche Auswirkungen auf uns, nehmen wir als Beispiele nur volkswirtschaftliche Modelle, mit denen Steuererhöhungen oder Steuersenkungen begründet werden oder Klimamodelle, mit denen auf Veränderungen durch menschliche Energienutzung verwiesen wird.

Das Stichwort „menschliche Energienutzung“ erinnert daran, dass in der Grafik zwar das Wort Mensch steht, damit aber nicht behauptet werden soll, alle Menschen seien gleich, hätten gleiche Wahrnehmungen der Realität, Interessen an Veränderung und ähnliche Möglichkeiten zur Beeinflussung. Wer in Europa oder Nordamerika in einem Haus mit Heizung und Klimaanlage wohnt, nutzt deutlich mehr Energie als jemand, der in Afrika oder Mittelamerika auf der Straße lebt. Wer an der Börse mit Lebensmitteln spekuliert, hat einen ganz anderen Zugang zu Getreide als jemand, der wegen hoher Preise für Getreide seine Familie nicht ernähren kann. Wer mit dem Fahrrad in den Urlaub radelt, braucht dazu viel weniger Erdöl als jemand, der im Urlaub um die halbe Welt fliegt.

Ebenso unterschiedlich sind für verschiedene Menschen ihre Zugänge zur Realität bzw. ihre Wahrnehmung derselben; dies wiederum hängt auch damit zusammen, welche Modelle von Aspekten der Realität sie im Kopf haben und nutzen können. Uns ist bewusst, dass wir hier das Wort Realität in einer philosophisch recht naiven Weise gebrauchen, wir verzichten hier jedoch bewusst auf einen erkenntnistheoretischen Exkurs.

Mit anderen Worten: Die Grafik selbst ist ein sehr stark vereinfachtes Modell des menschlichen Umgangs mit Realität, in dem Modellierung stets eine Rolle spielt. Zu jedem der drei verwendeten Begriffe gibt es ganze Bibliotheken von Wissen, Erfahrungen und Theorien, auf die hier nicht eingegangen werden soll.

Die Anmerkungen zur Grafik abschließend sei noch angemerkt, dass es zwischen Realität und Mensch offenbar eine Wechselwirkung gibt. Auf der einen Seite gibt die soziale, wirtschaftliche, gesellschaftliche, ökologische und persönliche Realität für jeden Menschen einen Rahmen, in dem er sich bewegen kann. Auf der anderen Seite beeinflussen Menschen diesen Rahmen und damit die Realität, indem sie versuchen, ihre Situation zu erkennen und zu verbessern.

Und wo bleibt die Mathematik? Die Modellierung mit mathematischen Methoden ist in der Forschung selbstverständlich. Forschungsberichte aus Natur- und Sozialwissenschaft enthalten ebenso wie solche aus anderen Bereichen der Wissenschaft ganz selbstverständlich mathematische Formeln (manche nennen diese Formeln „Gesetze" in der Hoffnung, dass sich Natur und Gesellschaft daran halten mögen) und als Begründungen für die Richtigkeit Ergebnisse bzw. die Korrektheit der Forschungsmethoden Verweise auf benutzte Mathematik.

Generell haben wir auch aufgrund unserer Beschäftigung mit Industriemathematik den Eindruck, dass mathematische Modellierung für eine große Menge von Aspekten der Realität eine genauere und tiefer gehende Einsicht und Veränderungsmöglichkeit eröffnet. Das gilt insbesondere für naturwissenschaftliche, technische und ökonomische Themen; wenn hingegen individuelle menschliche Verhaltensweisen oder psychologische Faktoren modelliert werden sollen, zeigen sich schnell Grenzen sinnvoller mathematischer Modellierung.

Im Alltag der meisten Menschen sind explizite Modellierungen mit mathematischen Methoden eher selten. Wir meinen, dass deshalb vielen Menschen eine Möglichkeit zur rationaleren Entscheidungsfindung bzw. zum besseren Verständnis von gesellschaftlichen, wirtschaftlichen und ökologischen Entwicklungen verpassen und plädieren auch deshalb für realitätsbezogenen Mathematikunterricht.

Um auf die mögliche Rolle der Mathematik beim Modellieren auch optisch deutlicher hinzuweisen, erweitern wir die Grafik im Bereich „Modell“:

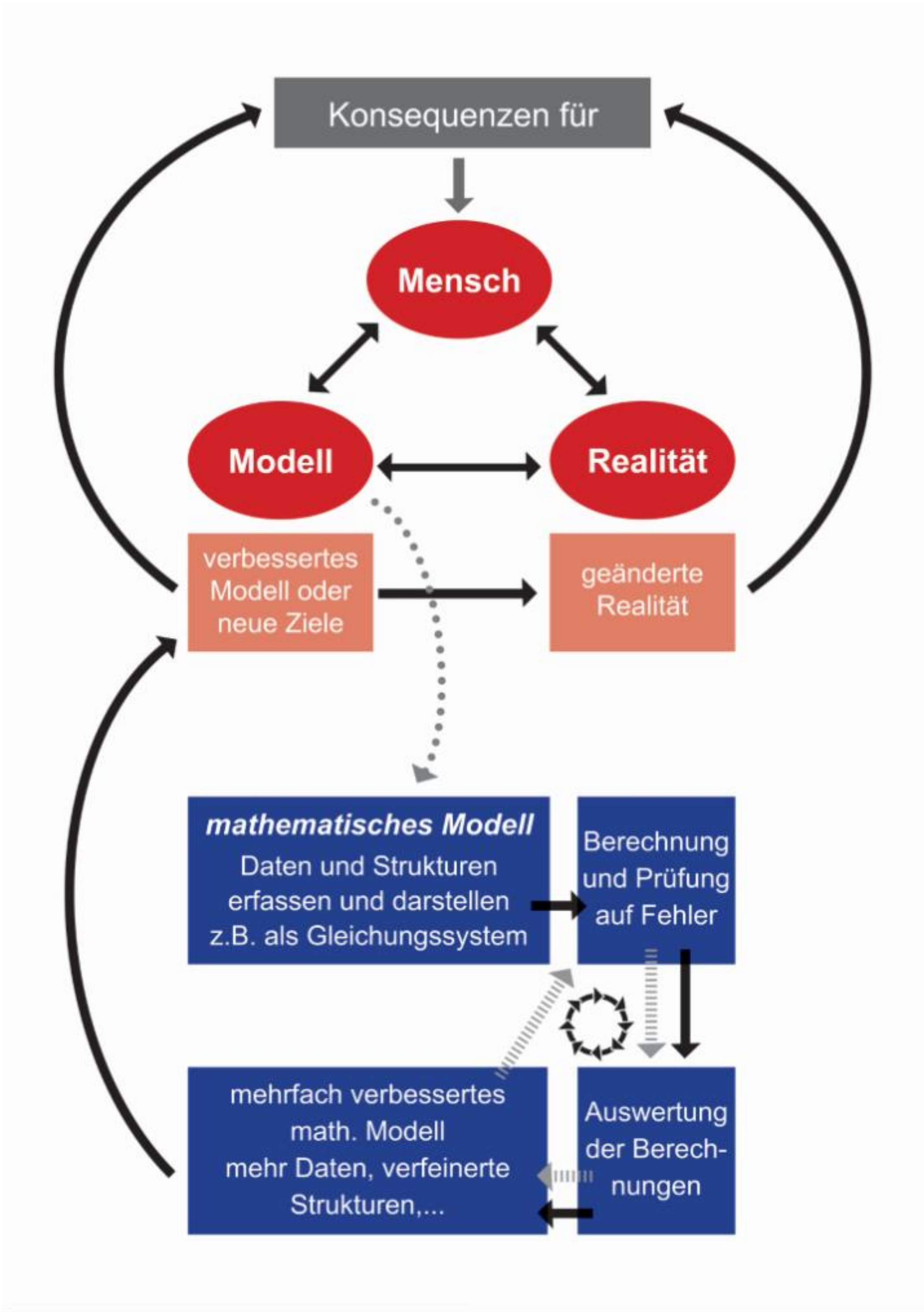


Abbildung 28: Detaillierter Modellierungskreislauf

Die Arbeit am mathematischen Modell steht hier im Mittelpunkt des unteren Teils der Grafik, der gleichsam mit einer Lupe in den Bereich „Modell“ hineinschaut. Mit dem Ziel, ein mathematisches Modell zu erstellen, werden aus dem Modell jener Aspekte der Realität, die zu erkennen oder zu verändern sich der Menschen zum Ziel gesetzt hat, die benötigten Daten samt ihrer Struktur herausgefiltert. Wichtig ist, dass es hier nicht einfach eine TOP => DOWN Struktur gibt, in der ein planender Mensch die Wirklichkeit nach seinem Willen modelliert und mathematisiert – auch wenn das viele Menschen gern tun könnten. Tatsächlich geht es um vielfältige Wechselwirkungen. Schon bei der Auswahl von zu beachtenden Aspekten der Realität geht als ein Kriterium mit ein, welche Aspekte denn überhaupt sinnvoll mathematisch beschreibbare sind. Emotionen und andere psychologische Aspekte bleiben deshalb ebenso unbeachtet wie soziale Beziehungen oder Esoterisches. Nicht zuletzt bestimmen der Umfang und die Qualität des mathematischen Wissens, was denn überhaupt als sinnvoll mathematisierbar angesehen wird. Wer noch nie etwas von numerischen Lösungen für komplexe Differentialgleichungssystemen zur Beschreibung von Strömungen gehört hat, wird sich vermutlich nicht vornehmen, den Bug eines Schiffes mit mathematischen Mitteln zu optimieren.

In der Grafik wird versucht, der Dynamik einer Modellierung insofern Rechnung zu tragen, als optisch mehrere Durchläufe eingezeichnet sind (vgl. der kleine Kreis im Teil mathematische Modellierung rechts unten). Der blaue Teil, die mathematische Modellierung unten, ist eigentlich „nur“ ein besonderer Bestandteil der Modellierung, eine spezifische und in gewisser Hinsicht besonders effektive Methode der Modellierung.

Wenn die mathematische Arbeit im engeren Sinn für die erste mathematische Modellierung getan ist, ergeben sich daraus häufig Wünsche an die Modellierung und Versuche, sie durch bessere Daten, mehr Information über die Struktur der Daten oder das gezielte Nicht-Beachten bestimmter Aspekte des Modells zu verbessern. Auch nach besserer mathematischer Modellierung wird häufig gesucht. Es gibt keine fixe Regel dafür, nach wie vielen solcher Durchläufe das Ergebnis den Wünschen entspricht oder die weitere Arbeit an diesem Thema aufgrund von Zeitmangel, fehlenden weiteren Möglichkeiten zur Modellverbesserung oder anderen Gründen abgebrochen wird. In diesem Zusammenhang sei auch noch ausdrücklich erwähnt, dass auch die EDV, die Möglichkeiten und Grenzen des Einsatzes von mathematischer Software einen großen Einfluss auf die Auswahl von Themen, Aspekten der Modellierung und

Chancen zu einem adäquaten Ergebnis zu kommen hat. Viele Themen können heute in der Forschung, der Industrie und in der Schule nur deshalb thematisiert werden, weil die EDV hinreichende Unterstützung bietet.

Die Kästen für „verbessertes Modell oder neue Ziele“ und „geänderte Realität“ sollen daran erinnern, dass die (mathematische) Modellierung Folgen haben kann und soll, die ihrerseits wiederum Rückwirkungen auf den Menschen haben können und sollen. Eine mögliche Rückwirkung etwa einer forschenden Modellierung sind häufig neue Einsichten und Fragen, die zu neuen Modellierungen führen.

Die dritte und letzte Grafik im Exkurs zur Modellierung soll visualisieren, dass es hier um einen offenen Prozess geht, der zu einem ungewissen Ende führt.

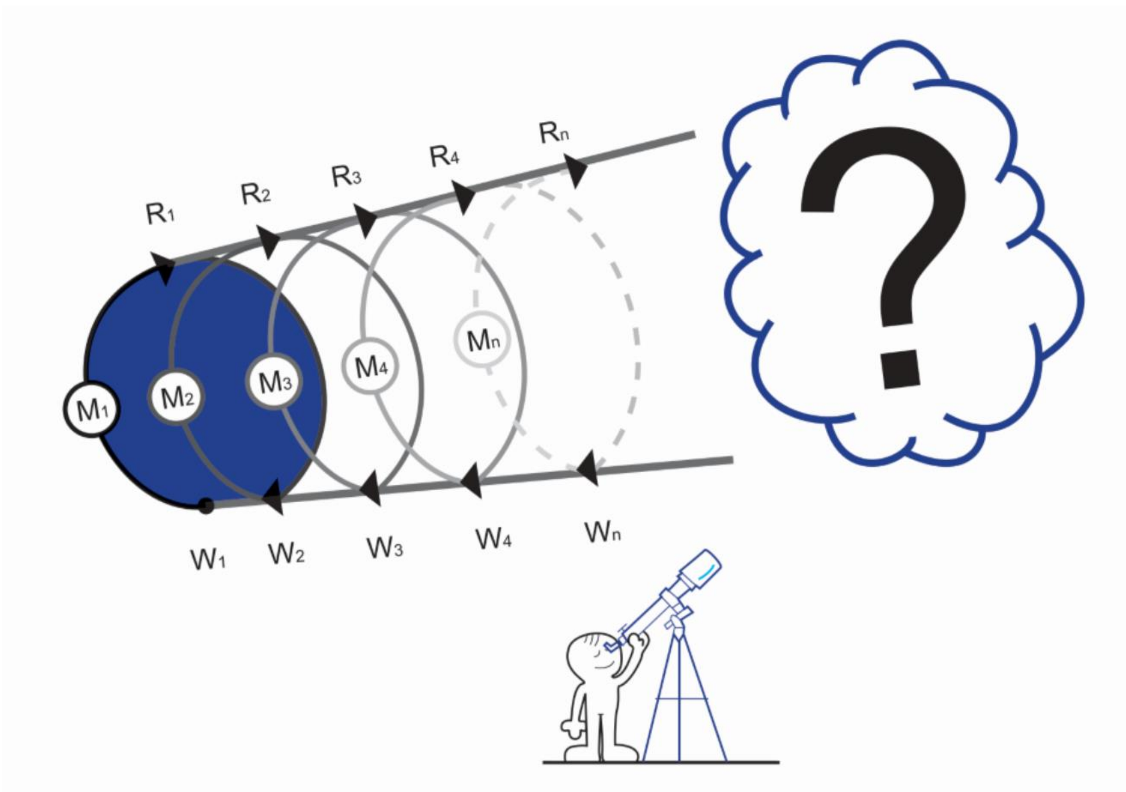


Abbildung 29: Modellierungskreislauf – perspektivisch

Ausgangspunkt sind wieder WIR, also Menschen, die etwas verstehen oder verändern wollen, dazu Modellieren und Konsequenzen für die Realität bewirken. Diese Konsequenzen oder anderen Motivationen führen zu erneuten Anstrengungen, zu neuen und hoffentlich besseren Modellen, die wiederum Auswirkungen auf die Realität haben. Wann und wie die Bemühung um eine Verbesserung der Erkenntnis oder der Realität endet, ist zu Beginn prinzipiell ebenso offen, wie die abschließende Bewertung des Prozesses: Ist tatsächlich (bzw. aus wessen Sicht?) eine Verbesserung erreicht worden?

Ausklang

Liebe Leserinnen und Leser, mit diesem Exkurs zur Modellierung endet das Buch. Ich hoffe, dass es für Sie, Ihre Schülerinnen und Schüler und somit für Ihren Mathematikunterricht hilfreich ist und freue mich über Ihr Feedback.

Jürgen Maaß, Linz, im Sommer 2015 (Juergen.Maasz@jku.at)

Literatur

G. Androsch u.a.: Math Eyes: Die Welt mit mathematischen Augen sehen. Bericht über einen Wettbewerb als Anregung für motivierenden Mathematikunterricht, in:

L. Del Chicca, M. Hohenwarter: Mathematikdidaktik im Dialog, Schriftenreihe der Pädagogischen Hochschule OÖ, Band 5, Trauner Verlag Linz 2015

S. Baruk: L'âge du capitaine (Points Sciences), Contempoary French Fiction, Januar 1998

J. Bastian u.a. (Hrsg): Theorie des Projektunterrichts, Verlag Bergmann + Helbig, Hamburg 1997

B. Best: Der gekaufte Fußball – manipulierte Spiele und betrogene Fans. Murmann Verlag: Hamburg.

K.-R. Biermann: J.-H. Lambert und die Berliner Akademie der Wissenschaften, in: Colloque Intern. Jean-Henri Lambert (1728-1777), Paris 1979

A. Brinkmann, M. Brandl, J. Maaß: Mathe vernetzt – Kopiervorlagen und Materialien zu Band 1–3. Aulis Verlag 2013

B. Booß, J. Hoyrup: Von Mathematik und Krieg. Über die Bedeutung von Rüstung und militärischen Anforderungen für die Entwicklung der Mathematik in Geschichte und Gegenwart, Marburg 1984

E. Dorner: Elemente der Mathematik, AHS Schulbuch, Wien 2006

R. Fischer, G. Malle: Mensch und Mathematik: Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln, Profil Verlag München 1985

K. Frey: Die Projektmethode: »Der Weg zum bildenden Tun«, Beltz Verlag Weinheim 2005

D. Fries, G. Lapport, A. Simon, G. Wiederstein: Mathematik hilft [fast] immer! Mathematisches Modellieren in der Schule, Ministerium für Bildung, Frauen und Jugend, Rheinland-Pfalz 2004

S. Borgwardt, A. Brieden, P. Gritzmann: Geometrisches Clustering: Mathematik für die Flurverbesserung. Dieser Aufsatz ist eine (freie) Übersetzung des Artikels Geometric Clustering for the Consolidation of Farmland and Woodland, Mathematical Intelligencer 36 (2014), 37–44.

M. Haberbauer: Einstellungen und Emotionen von Mathematiklehrern, Diplomarbeit, JKU Linz 2015 (zu finden in der Sammlung von Diplomarbeiten unter www.jku.at)

D. Hell, B. Kellhofer: Wett-Geschäft. In: NEWS, Ausgabe 23/11 (2011), Verlagsgruppe News: Wien, S. 62-63.

W. Herget, D. Scholz: Die etwas andere Aufgabe — aus der Zeitung. Mathematik-Aufgaben Sek I. Mit Lösungsvorschlägen, Seelze 1998

H. W. Heymann: Allgemeinbildung und Mathematik. Beltz Verlag, Weinheim, Basel 1996

S. T. Hopmann, G. Brinek, M. Retzl (Hg./Eds.): PISA zufolge PISA – PISA According to PISA. Hält PISA, was es verspricht? – Does PISA Keep What It Promises?, LIT VERLAG, Wien – Zürich 2007

http://www.univie.ac.at/pisaaccordingtopisa/pisazufolgepisa.pdf

H. Hülsmann: Mathematik in der technologischen Formation, in: J. Maaß und W. Schlöglmann (Hrsg): Mathematik als Technologie? Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Neuen Technologien, Aus- und Weiterbildung, Weinheim 1989

L. Huber: Ausbildung und Sozialisation in der Hochschule, Klett-Cotta, Stuttgart 1993, 2. Aufl.

J. Klüver: Struktur der Disziplin - Die Rolle der Fachsystematik bei der Entwicklung von Hochschulcurricula, Interdisziplinäres Zentrum für Hochschuldidaktik IZHD der Univ. Hamburg, 1977

J. Klüver: Die Konstruktion der sozialen Realität Wissenschaft: Alltag und System, Vieweg+Teubner Verlag 1988

M. Ludwig: Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums, Texte zur Mathematischen Forschung und Lehre 5. Hildesheim: Franzbecker 1998; Würzburg: Univ. Würzburg (Diss. 1997)

J. Maaß: Mathematik als soziales System. Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht, Deutscher Studien Verlag, Weinheim 1988

J. Maaß: Erwachsene lernen Mathematik, in: Die Österreichische Volkshochschule. Magazin für Erwachsenenbildung, Volume 64, Number 246, Page(s) 29-31, 2012, S. 29

J. Maaß, W. Schlöglmann (Hrsg.): Mathematik als Technologie? Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Neuen Technologien, Aus- und Weiterbildung, Deutscher Studien Verlag, Weinheim 1989

J. Maaß, W. Schlöglmann: Der Stoßofen - Ein Beispiel für Industriemathematik als Unterrichtsthema, in: W. Blum (Hrsg.): Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker Hildesheim 1993

J. Maaß, S. Siller: Fussball EM mit Sportwetten, in: A. Brinkmann, R. Oldenburg (Eds.): Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Volume 14, Franzbecker, 2009.

J. Maaß, M. Wildt: Vernetzen lohnt sich: Nachhaltiger Lernen hilft Zeit sparen!, in: M. Brandl, u.a.: Mathe vernetzt Bd. 2, Anregungen und Materialien für einen vernetzten Mathematikunterricht, Aulis Verlag 2012

K. Maaß (2008): Teachers' beliefs about mathematics and its teaching – A qualitative study in Germany. In: 11th International Congress on Mathematical Education, Topic Study Group 30. Online verfügbar unter: http://tsg.icme11.org/tsg/show/31

E. Nagel, J.R. Newman: Der Gödelsche Beweis, Wien/München 1964

H. Neunzert, U. Trottenberg: Mathematik ist Technologie. Ein Beitrag zur Innovations-Initiative aus Fraunhofer-Sicht, Kaiserslautern und Stankt Augustin 2007 http://www.itwm.fraunhofer.de/fileadmin/ITWM-Media/Zentral/Mathematik_ist_Technologie.pdf

G. Ossimitz: Entwicklung systemischen Denkens. Theoretische Konzepte und empirische Untersuchungen, Profil Verlag, München 2000

Pädagogisches Institut für die deutsche Sprachgruppe - Bozen (2000 – 2014): http://www.blikk.it/angebote/modellmathe/ma0219_arb4.htm

K. Popper: Logik der Forschung, 6. Auflage, Tübingen 1976

M. Prenzel et al.: PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland-Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs, Waxmann Verlag Münster 2004

P. Ruben: Mathematik und Arbeit in philosophischer Sicht, in: J. Maaß und W. Schlöglmann (Hrsg): Mathematik als Technologie? Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Neuen Technologien, Aus- und Weiterbildung, Weinheim 1989

Schukajlow, S., Blum, W., & Krämer, J. (2011). Förderung der Modellierungskompetenz durch selbständiges Arbeiten im Unterricht mit und ohne Lösungsplan. Praxis der Mathematik in der Schule, 53(38), 40-45

S. Siller u.a.: Sportwetten und Großereignisse als Chance für den Mathematikunterricht, in: Praxis der Mathematik in der Schule, Heft 66 zum Thema Stochastik

R. Tschiedel: Sozialverträgliche Technikgestaltung. Wissenschaftskritik für eine soziologische Sozialverträglichkeitsforschung, Habilitationsschrift, Münster und Laer 1987

Im realitätsbezogenen Mathematikunterricht werden Aspekte der Realität ausgewählt und mathematisch modelliert. So lassen sich natürliche, wirtschaftliche oder soziale Zusammenhänge besser verstehen und verändern. In vielen Fällen sind dabei Simulationen von einfachen Modellen sehr hilfreich. Offene Unterrichtsmethoden sind im realitätsbezogenen Mathematikunterricht besonders empfehlenswert, weil so vielfältige Chancen zu entdeckendem Lernen, hoher Motivation und nachhaltigem Lernerfolg eröffnet werden.

Eine Lehrkraft in Mathematik wird im realitätsbezogenen Mathematikunterricht von einer Person, an deren strengen Frontalunterricht mit vielen unangenehmen Prüfungen sich noch Erwachsene in Alpträumen erinnern, zum beliebten Menschen, der hilft, die Welt der Mathematik und mit ihr die Welt außerhalb der Mathematik zu verstehen und zu verändern.

Das klingt motivierend, oder? Aber: Wie kann eine Lehrkraft, die nie in dieser Weise unterrichtet wurde, ihren Unterricht in dieser Richtung ändern? Dieses Lernbuch hilft dabei! Ausgehend von kleinen Schritten, etwas umformulierten Schulbuchaufgaben, bis hin zu größeren Projekten werden Sie als Leserin bzw. als Leser zum Mitmachen und Ausprobieren eingeladen.

ISBN 978-3-942197-83-0