

Buffons Nadel

Infos: www.mued.de

Im 18. Jahrhundert beteiligten sich eine Reihe von Adeligen an der Weiterentwicklung der Naturwissenschaften und Mathematik. So auch der französische Comte de Buffon. Seine vielen Werke sind inzwischen vergessen. Aber nach ihm ist bis heute die Lösung eines berühmten mathematischen Experiments benannt (s. Überschrift):

Auf einer horizontalen Fläche sind parallele Linien mit gleichem Abstand zu sehen (ein liniertes Blatt Papier, ein Dielemboden o. ä.). Eine Nadel wird geworfen und landet auf der Fläche. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft sie eine Linie?



Georges-Louis Marie Leclerc, Comte de Buffon (* 7. September 1707 in Montbard; † 16. April 1788 in Paris)

aus: wikipedia, April 2013

Einige Bezeichnungen und Vorgaben

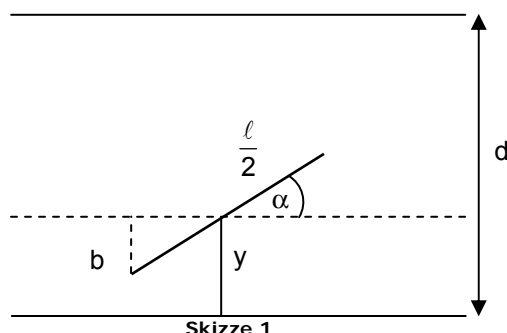
Den Abstand der Linien nenne d , die Nadellänge ℓ .

Es soll $\ell < d$ gelten, damit immer höchstens eine Linie getroffen wird.

Buffons Ideen

a) Beschreibung des Zufallsversuchs mit Variablen

Zu jedem Nadelwurf lässt sich der Abstand y zwischen der Nadelmittle und der näher gelegenen Linie bestimmen; ebenso der (kleinere) Winkel, den die Nadel mit einer Parallelen zu den Linien durch den Nadelmittelpunkt bildet.



Skizze 1

Die beiden Größen y und α sind entscheidend dafür, ob die Nadel eine Linie trifft – bei vorgegebenem ℓ und d . Der Fall tritt ein, sobald $y \leq b$ gilt. In dem rechtwinkligen

Dreieck mit der Kathete b ergibt sich $b = \frac{\ell}{2} \cdot \sin \alpha$.

b) Anordnung der relevanten Größen

Alle hier infrage kommenden Datenpunkte $(\alpha|y)$ liegen in einem Rechteck mit der

Breite $\frac{\pi}{2}$ und der Länge $\frac{d}{2}$.

Legt man ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in die linke untere Ecke des Rechtecks, so kann man $f(\alpha) = \frac{\ell}{2} \cdot \sin \alpha$ skizzieren.

Die Fläche unter der Kurve (innerhalb des Rechtecks) markiert die "günstigen Fälle" für ein Treffen einer Linie durch die Nadel. Die gesamte Rechteckfläche zeigt alle "möglichen Fälle".

1. a) Zeichne das Rechteck passend zu den Daten der gegebenen Skizze.
b) Markiere den Punkt im Rechteck, der zur Skizze 1 gehört.
2. Erläutere die Berechnung von b.
3. Skizziere die Funktion $f(\alpha)$ in das Koordinatensystem und schraffiere die "günstige" Fläche.
4. Berechne die Fläche unter der Kurve in den Rechteckgrenzen.
5. Berechne die Rechteckfläche.
6. Bestimme P (die geworfene Nadel trifft eine Linie) in Abhängigkeit von ℓ und d .
7. Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit bei Vergrößerung von ℓ , wie bei Vergrößerung von d ? Passt das plausibel zur Problematik?
8. Berechne die Wahrscheinlichkeit für die Situation in Skizze 1.

Zusatz 1: Statistische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit

- a) Passend zur Länge ℓ der Stecknadeln (oder kleinen Holzpickern) in einer Packung hat die Lehrperson Parallelen im Abstand d auf ein A3-Blatt gezeichnet – für jede/n Schüler/in; oder das Experiment nutzt den Parkettboden in der Aula. Jede/r lässt eine Nadel aus einer abgesprochenen Höhe 100-mal auf das Blatt oder das Parkett hinunterfallen. Zähle mit, wie oft du wirfst, notiere in einer Strichliste, wie oft eine Linie getroffen wird.
- b) Die Werte werden z. B. an der Tafel gesammelt, addiert und es wird jeweils die relative Häufigkeit berechnet.
- c) Vergleiche die letzte berechnete relative Häufigkeit mit der Wahrscheinlichkeit, die sich nach der Formel in 6 ergibt.

Zusatz 2: Simulation

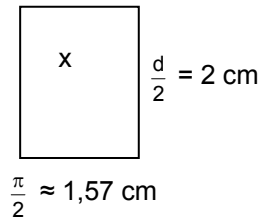
Da man alle Werte für $(\alpha|y)$ als gleichwahrscheinlich unterstellt, kann man das Problem auch diskret untersuchen.

- a) Lege Werte für ℓ und d fest.
- b) Erzeuge mit Excel Zufallszahlen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für α , ebenso für y zwischen 0 und $\frac{d}{2}$.
- c) Berechne b.
- d) Zähle die Zufallsversuche und die Fälle mit $y \leq b$.
- e) Berechne P nach 4000 Versuchen und vergleiche.

Zusatz 3: Experimentelle π -Bestimmung

Mit der vorgegebenen Formel für die Wahrscheinlichkeit lässt sich das Experiment in Zusatz 1 oder die Simulation in Zusatz 2 auch nutzen, um π experimentell anzunähern.

1. a), b)



Punktkoordinaten (siehe x) passend zu Skizze 1:

$$\alpha = 32^\circ \text{ bzw.}$$

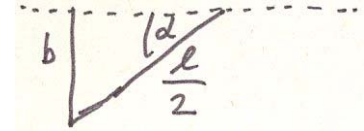
$$\alpha = \frac{32 \cdot \pi}{180} \approx 0,56$$

$$\text{und } y = 1,3$$

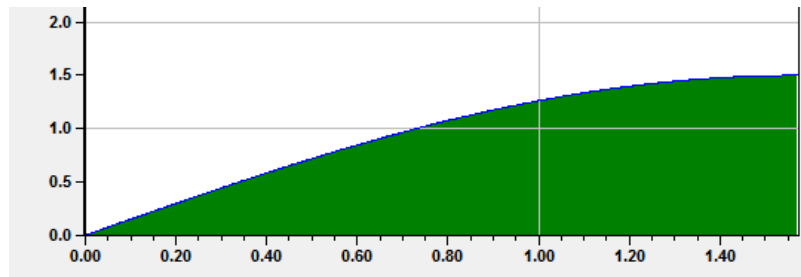
2. In dem rechtwinkligen Dreieck (in der Skizze 1 links unten) gilt:

$$\sin \alpha = \frac{b}{\ell/2}$$

$$b = \frac{\ell}{2} \cdot \sin \alpha$$



3. $f(\alpha) = \frac{\ell}{2} \cdot \sin \alpha$ (mit gestreckter α -Achse)



4. Größe der Fläche unter der Kurve: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2} \cdot \sin \alpha \, d\alpha = -\frac{\ell}{2} \cdot \cos \alpha \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\ell}{2} \cdot (0 - 1) = \frac{\ell}{2}$

5. Größe der Rechteckfläche: $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d}{4}$

6. $P(\text{die geworfene Nadel trifft eine Linie}) = \frac{\text{graue Fläche}}{\text{Gesamtfläche}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\pi \cdot d}{4}} = \frac{2 \cdot \ell}{\pi \cdot d}$

7. Qualitativ ist die Formel plausibel: Die Wahrscheinlichkeit sollte größer werden, wenn ℓ größer wird, und bei Vergrößerung der Dielenbreite d sollte sie abnehmen.

8. $\ell = 3 \text{ cm}; d = 4 \text{ cm}$

$$P = \frac{2 \cdot 3}{\pi \cdot 4} \approx 47,7 \%$$

Zusatz 1: Statistische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit

Zum Beispiel an der Tafel wird auf Zuruf der Schüler/innen die zweite Spalte der Tabelle gefüllt und zeilenweise ergänzt. Nach dem Gesetz der großen Zahl stabilisiert sich die relative Häufigkeit in der rechten Spalte mit zunehmender Wurfzahl bei der Wahrscheinlichkeit.

Wurfzahl	Trefferzahl	relative Häufigkeit	Summe Wurfzahl	Summe Trefferzahl	relative Häufigkeit
1. 100	37	37 %	100	37	37,0 %
2. 100	53	53 %	200	90	45,0 %
3. 100	49	49 %	300	139	46,3 %
4. 100	65	65 %	400	204	51,0 %
...					

Zusatz 2: Simulation

Excel-Programm; nach Voreinstellung der Rekursionsmöglichkeit nutzbar

1		Nadelwurf auf parallele Linien: Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft die Nadel eine Linie?
2		
3	4	"Wert für den Abstand der Parallelen d"
4	3	"Wert für die Nadellänge l"
5	0,19450143	"=Zufallszahl()*PI()/2 -- Erzeugung eines Zufallswinkels alpha"
6	1,82571087	"=Zufallszahl()*d/2 -- Erzeugung eines Zufallsabstandes y zur nächsten Linie"
7	1	"Wert für den Startschalter 0; 1, wenn alle Summationen starten sollen"
8	1886	"=(A8+WENN(A6<=A4/2*sin(A5);1;0))*A7 -- Summation der Trefferzahlen"
9	4004	"=(A9+1)*A7 -- Summation der Würfezahl"
10	0,471	"=Runden(A8/A9;4) -- Anteil gerundet auf 4 Nachkommastellen"
11		
12	0,4775	"=RUNDEN(2*A4/(PI()*A3);4) -- der berechnete Wahrscheinlichkeitswert nach Buffon"

Nach rund 4000 Versuchen ergibt sich eine relative Häufigkeit von 47,1 % (für $l = 3$ und $d = 4$). Die Formel oben erwartet rund 47,7 %. Die relative Häufigkeit liegt nahe bei der Wahrscheinlichkeit.

Zusatz 2: Experimentelle π -Bestimmung

Mit den Werten aus Zusatz 2 ergibt sich $\frac{2 \cdot 3}{\pi \cdot 4} \approx 0,477$ und daraus $\pi \approx \frac{2 \cdot 3}{\pi \cdot 4} \approx 3,145$. Das ist schon eine gute Näherung für π .

Das **Arbeitsblatt des Monats Mai** heißt: Buffons Nadel. Sollen Ihre Schüler-innen π experimentell bestimmen? Wollen Sie Ihre Schüler-innen die Wahrscheinlichkeit für das Schneiden von Parkettlinien durch geworfene Nadeln experimentell bestimmen und dabei das Gesetz der Großen Zahl entdecken lassen? Das geht mit Teilen des Arbeitsblattes ab Klasse 7.

Oder wollen Sie die genialen Mathematisierungsschritte Buffons von Ihrem Leistungskurs Mathematik nachentdecken und dabei eine tolle Schnittstelle zwischen Analysis und Stochastik nutzen lassen? Zudem kann man mit dem Problem auch in die Simulation stochastischer Prozesse mit Excel einführen – unter Rückgriff auf diese Excel-Datei.