

Geburtstagsproblem

Infos: www.mued.de

Wie arbeitet ihr? Das Problem wird nicht von der ganzen Klasse, sondern nur von einer 2er-Gruppe bearbeitet, die ihr Ergebnis der ganzen Klasse präsentiert.

Was benötigt ihr? Einen Topf mit 365 (nicht-roten) Plättchen und 50 rote Plättchen außerhalb des Topfes.

Du gehst feiern. In dem Saal sind ein Haufen Leute. Dir wird eine Wette angeboten: Wenn von den Anwesenden (mindestens) zwei am selben Tag Geburtstag haben, gewinnst du. Wenn alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben, verlierst du. Sind 366 Personen da, spielst du - klar. Aber ab welcher Personenzahl rechnest du dir mindestens 50 % Chancen aus?

A. Schätze die nötige Anzahl.

B. Simuliert zu zweit die Situation 21mal jeweils bis zum ersten Doppelgeburtstag.

Was sollt ihr tun? Eine-r zieht, eine-r macht eine Strichliste für die Zahl der Züge bis zum ersten Zug eines roten Plättchens.

1. Zug: Ein Plättchen aus dem Topf ziehen und durch ein rotes ersetzen.
2. Zug: Den Topf mit den insgesamt 365 Plättchen bei geschlossenem Deckel ordentlich durchschütteln und ungesehen ein Plättchen ziehen. Ist es rot, dann endet das Spiel. Ist es nicht rot, dann wird das Plättchen durch ein rotes ersetzt.
- 3...Zug: Der Zug 2 wird solange wiederholt, bis das Spiel endet. Die Zahl der Züge bis „rot“ kann in der Strichliste abgelesen werden und wird notiert.

Die Abfolge 1. bis 3. wird 21mal wiederholt. Vor der nächsten Simulation müssen immer alle roten Plättchen wieder durch die ursprünglichen Plättchen ersetzt werden.

C. Sucht die mittlere Zügezahl. Das bedeutet, ihr sucht unter den 21 notierten Zügezahlen diejenige, bei der die Hälfte der notierten Zügezahlen drüber, die andere Hälfte drunter liegt.

D. Bereitet eine Präsentation des Ergebnisses vor.

Einige Tipps:

- Lasst zu Beginn der Präsentation alle die nötige Anzahl schätzen (Punkt A).
- Erläutert, wie ihr vorgegangen seid. Dabei sollte klar werden, dass euer Zugspiel die Geburtssituation passend simuliert.
- Zeigt exemplarisch eine Zugfolge bis „rot“. Erklärt noch einmal, was im Problemzusammenhang der Zug eines roten Plättchens bedeutet.
- Zeigt die Zahlen, die sich bei euren Strichlisten ergeben haben.
- Erklärt, wie ihr auf den Mittelwert gekommen seid.
- Formuliert das Ergebnis eurer Simulationen.

E. Info: Die 32 Fußball-Nationalmannschaften, die zur Weltmeisterschaft antreten, haben jeweils 23 Mitglieder. Bei der WM 2014 in Brasilien gab es in 16 Teams mindestens einen Doppelgeburtstag, bei der WM 2010 waren es 15.

(nach: Frankfurter Rundschau, 17.6.2014)

Passt die Information zu euren Ergebnissen?

Hinweise für Lehrpersonen

Wegen der großen Zahl der benötigten Plättchen kann die Simulation nur von einer 2er-Gruppe und nicht von der ganzen Klasse gemacht werden. Statt eines Würfelbechers sollten die beiden Schüler-innen besser einen Topf mit Deckel als Urne verwenden. Die Durchmischung der Plättchen ist dann besser und sie können besser reingreifen und tatsächlich jedes Plättchen erwischen.

Das Simulationsexperiment passt zur Fragestellung:

- Da es nur 365 verschiedene Geburtstage im Jahr gibt, reicht es, eine Gruppe von 365 Personen mit ihren jeweils zufälligen Geburtstagen zu simulieren.
- Die Entnahme eines Plättchens steht für die Erfragung eines Geburtstagsdatums (nicht des Jahres).
- Das Ersetzen durch ein rotes Plättchen bedeutet, dass das Datum noch nicht gefallen ist, aber neu als jetzt gefallen berücksichtigt wird.
- Der Zug eines roten Plättchens bedeutet, dass das gerade erfragte Geburtsdatum schon einmal gefallen ist.

Diese Erläuterung sollte unter dem 2. Spiegelsstrich in Punkt D (Präsentation) so oder ähnlich von den Schüler-innen vorgetragen werden.

Sie als Lehrperson müssen diese Erläuterungen evtl. auch zu den Handlungsanweisungen 1 bis 3 unter Punkt B geben.

Excel-Programme

Vor der Präsentation kann die 2er-Gruppe zur Absicherung ihres Ergebnisses mit dem Programm „**Doppelgeburtstag – einfach**“ die Ziehungen simulieren. Das Programm liefert, genau wie beim eigenen Ziehen, die Anzahl bis zum ersten Doppelgeburtstag. Dann wird neu gestartet für die nächste Zahl....

Mit dem Programm kann die schon angelegte Liste der Zugzahlen bis zum ersten Doppelgeburtstag schnell ergänzt werden. Oder, falls das Ziehen von Hand insgesamt zu langwierig für die Unterrichtssituation ist, kann die 2er-Gruppe sofort mit dem Programm starten – mit einer kurzen Einführung durch Sie.

Falls das Geburtstagsproblem der Klasse nur kurz präsentiert werden soll ohne eigene Versuche, dann können Sie das Programm „**Doppelgeburtstag – mehrfach**“ nutzen. Nach der Einstellung für den Start können Sie zunächst Einzelclicks auf F9 machen, um zu zeigen, wie das Programm funktioniert. Durch Dauerdrücken von F9 kommen Sie schnell zu brauchbaren Durchschnittswerten für die Zahl der nötigen Züge bzw. benötigten Personen für einen Doppelgeburtstag.

Das Prinzip beider Programme

- In Spalte A stehen die 365 Tage des Jahres, in Spalte B, ob ein Tag gezogen wurde (eine 1 statt einer 0), in Spalte C, ob ein Tag mehr als einmal gezogen wurde (2 in Spalte B, 1 in Spalte C). Das kann man durch Einzelclicks auf F9 Schritt für Schritt zeigen. Wenn die Summe der Spalte C in C368 größer 0 ist (also ein Doppelgeburtstag gefallen ist), dann wird der Zügezähler E4 nicht weiter erhöht. Er kann abgelesen werden. Mit dem Neustart von Hand geht es weiter.
- „Doppelgeburtstag – mehrfach“ addiert die ermittelte Zügezähl bis zum Doppelgeburtstag, setzt alles wieder auf Null und startet die nächste Zugfolge automatisch. Und es wird mitgezählt, wie viele Simulationsfolgen es gab und die Durchschnittslänge der Zugfolgen bis zum ersten Doppelgeburtstag wird ausgegeben.

•
Erweiterung

Berechne die Gruppengröße, für die die Wahrscheinlichkeit für (mindestens) zwei gleiche Geburtstage 50 % überschreitet.

Tipps:

- Statt einer Positivantwort (2mal derselbe Geburtstag) untersuche die Wahrscheinlichkeit für eine Negativantwort (alle haben verschiedene Geburtstage).
- Überlege die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Person, nicht denselben Geburtstag hat wie die erste, dass die dritte Person nicht denselben Geburtstag wie die ersten beiden, usw. Das ist gleichbedeutend mit einem Baumdiagramm zum Problem, in dem nur der unterste Ast („Geburtstag neu“ in den Knoten) ausgeführt ist.
- Da die Geburtstage unabhängig voneinander sind, können die Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden.
- Lege eine Tabelle an, in der zur Zahl der erfragten Geburtstage die Wahrscheinlichkeit steht, mit der keine Geburtstage gleich sind.
- Ergänze eine Spalte, in der die Gegenwahrscheinlichkeit für (mindestens) einen gemeinsamen Geburtstag steht.
- Setze die Tabelle fort bis die Wahrscheinlichkeit, auf (mindestens) zwei Geburtstage zu treffen, 50 % überschreitet.

Bearbeitung

$$P(\text{alle Geburtstage sind verschieden}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \dots$$

$$P(\text{mindestens zwei gleiche Geburtstage}) = 1 - P(\text{alle Geburtstage sind verschieden})$$

Gruppen- größe	Wahrscheinlichkeit, dass alle Geburtstage verschieden sind	Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage
2	99,7 %	0,3 %
3	99,1 %	0,9 %
4	98,4 %	1,6 %
5	97,3 %	2,7 %
...
20	58,9 %	41,1 %
21	55,6 %	44,4 %
22	52,4 %	47,6 %
23	49,3 %	50,7 %
...
30	29,4 %	70,6 %
40	10,9 %	89,1 %
50	3,0 %	97,0 %

Aber einer Gruppengröße von 23 Personen trifft man mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50 % auf zwei Personen, die am selben Tag Geburtstag haben.

Hier ist die Tabelle bis n = 50 ausgeführt, um zu erläutern, warum oben beim Material nur 50 rote Plättchen vorgesehen sind. In 97 % aller Fälle haben die Schüler-innen in bis zu 50 Zügen zwei gleiche Geburtstage gezogen.

Die WM und das Geburtstags-Paradoxon

Bei der Fußball-Weltmeisterschaft in Brasilien interessieren sich Statistiker nicht nur für die Zahl der Tore: Auch die Geburtstage der Nationalspieler sind für sie von besonderer Faszination. 16 der 32 teilnehmenden Teams haben Spieler, die am selben Tag Geburtstag haben – kein Zufall, sondern eine Bestätigung für das sogenannte "Geburtstags-Paradox", wie der ungarische Mathematiker Peter Frankl sagt.

Der in Japan ansässige Wissenschaftler hat nachgewiesen, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von etwas mehr als 50 Prozent in jeder beliebigen 23-köpfigen Gruppe zwei Mitglieder am selben Tag Geburtstag haben. Auch jeder WM-Kader umfasst 23 Mitglieder.

Unter den 32 Fußball-Nationalmannschaften, die in Brasilien antreten, haben 16 Teams mindestens ein Geburtstags-Paar. Fünf Mannschaften Argentinien, Frankreich, der Iran,

Südkorea und die Schweiz haben sogar zwei. "Es ist schwer, die Leute davon zu überzeugen, aber es trifft fast immer zu", sagt Frankl. "Bei 32 Ländern mit jeweils 23 Spielern sind 50 Prozent Übereinstimmung aus mathematischer Sicht sogar weniger als erwartet." Frankl zufolge besteht etwa bei einer Schulklasse aus 30 Schülern eine Wahrscheinlichkeit von 70 Prozent, dass zwei der Schüler am selben Tag Geburtstag haben. "Bei 41 Menschen im Klassenzimmer liegt die Chance sogar bei 90 Prozent".

Um die Skeptiker zu überzeugen, haben die Mathematiker um Frankl auch die letzte WM in ihre Berechnungen mit einbezogen. Demnach gab es von den 64 Mannschaften, die zu den beiden WMs 2010 und 2014 antraten, 31 mit Geburtstags-Übereinstimmungen – eine Wahrscheinlichkeit von fast 50 Prozent.

aus: Frankfurter Rundschau, 17.06.2014

Naja, im letzten Satz geht es um eine relative Häufigkeit, keine Wahrscheinlichkeit.

ZUM GEBURTSTAGSPROBLEM

In den 23-köpfigen Teams der Fußballweltmeisterschaft in Brasilien gibt es unter den 32 teilnehmenden Mannschaften 16, bei denen mindestens zwei Spieler am selben Tag Geburtstag haben. – Zufall ?

Das ist ein aktueller Anlass, das Geburtstagsproblem genauer zu untersuchen: durch Simulation per Hand – siehe das erste Arbeitsblatt, durch Programmierung – siehe die Excelprogramme, oder durch Berechnung – siehe unter Erweiterung im Lehrerkommentar. Je nach Intensität der Behandlung passt die Bearbeitung des Problems in die Klasse 9/10 oder in den Stochastikunterricht der Oberstufe.

Die Bearbeitung stammt aus dem Mathekoffer zur Stochastik der MUED, der ab der Didacta 2015 verfügbar sein wird.

Übrigens: Zur WM gab es ein Arbeitsblatt Nr. 7/2010.