Rundbrief 172

2/2009

mit Einladung zur Arbeitstagung im Mai 2009

Offene Aufgaben und Handlungsorientierung in emanzipatorischer Absicht

Inhalt

Impressum
Der MUED-Rundbrief erscheint vier Mal im Jahr in Appelhülsen mit einer Auflage von 800 Exemplaren

MUED e.V., Bahnhofstr.72, 48301 Appelhülsen
Tel. 02509 / 606, Fax 02509 / 996516
e-mail: mued.ev@mued.de, http://www.mued.de

Redaktion dieses Rundbriefes: Daniela Breuer, Volker Eisen, Andreas Kurock

Redaktion des nächsten Rundbriefes: ?

Offene Aufgaben und Handlungsorientierung in emanzipatorischer Absicht

Alle reden über offene Aufgaben und eine veränderte Aufgabenkultur. Unzählige Veröffentlichungen und Internetangebote haben sich diesem Thema angenommen. Es wird wohl kaum einen MUEDen geben, der/die noch keine Erfahrungen damit gemacht hat, ja vielleicht sogar des Redens über offene Aufgaben schon überdrüssig ist. Warum also (noch mal) einen Rundbrief dazu?

Auch wenn die meisten Aufgaben der UEs und Broschüren in ihrem Kern offen sind, so sind doch fast alle davon äußerlich eher geschlossen formuliert. Dies steht den Ansprüchen entgegen, die auf den Jahrestagungen der letzten Jahre zu Unterrichtskultur, selbstständigem Lernen und heterogenitätsgerechtem Unterricht formuliert wurden. Auf der Homepage der MUED heißt es: "Wird Mathematik in relevanten Kontexten unterrichtet, öffnen sich notwendigerweise die Aufgaben im Unterricht und damit auch der Unterricht selbst. Damit kommt der Mathematikunterricht dem Anspruch der Allgemeinbildung nach, wenn er auf Lebensbezug und Eigeninitiative zielt. Er stellt den Bezug zu Lebenssituationen für jede und jeden her. Er lehrt, sich solchen Problemstellungen selbst zu nähern. Er vermittelt in einem tiefer liegenden Sinne viel mehr Mathematik als ein rein formal und innermathematisch ausgerichteter "offener" Unterricht – selbst bei je fünf möglichen Lösungswegen. Er lehrt nicht die Benutzung der fertigen Mathematikkalküle auf dafür gezielt angepasste (innermathematische und also meist sinnleere) Fragestellungen, sondern er lehrt zuallererst die Modellbildung, d. h. die Entwicklung von einer Alltagsproblematik hin zu einem mathematischen Modell und die Bearbeitung in dem Modell mit Rückbezug zur Ausgangsproblematik und evtl. Verbesserungen. Er ist notwendig so offen wie die ernstzunehmenden Ausgangsprobleme." (www.mued.de/Unterrichtskultur/UnterrichtskulturU3). Um diesen Anspruch auch in den Aufgabenstellungen deutlicher hervortreten zu lassen, zielt seit der Arbeitstagung 2008 die aktuelle Überarbeitungsrunde der UEs auf die exemplarische Umformulierung der Aufgabentexte; die UEs bekommen ein neues Inhaltsverzeichnis. Dieser Rundbrief möchte also in erster Linie für die Mitarbeit an diesem "Mammutprojekt" werben.

Gleichzeitig wollen wir uns dem Üben im Mathematikunterricht widmen, das häufig weniger unter dem Anspruch der Handlungsorientierung in emanzipatorischer Absicht steht, aber dennoch mehr sein sollte, als bloßes Päckchenrechnen. Viele geschlossene Übungsaufgaben (insb. Karteikarten) sind aus dem MUED-Fundus ausgemistet worden. Der Rundbrief gibt Beispiele, wie durch verhältnismäßig einfache Variationen aus eher geschlossenen Übungsaufgaben ein produktives Üben werden kann.

Schließlich ist spätestens seit der Jahrestagung 2006 auch die Öffnung von Aufgaben beim Erkunden, Entdecken und Erfinden von Mathematik im Blick der MUED. Offene Einstiege kommen allerdings sowohl in Broschüren als auch in UEs noch kaum vor. Ideen und Beispiele für Erkundungen werden hier vorgestellt.

Dies alles verbinden wir mit der herzlichen Einladung zu Arbeitstagung (erstmals in Haltern), um nicht zuletzt auch an diesen Baustellen voran zu kommen!

Andreas, Daniela, Volker

MUED bedeutet: guten Unterricht in einer guten Arbeitsgemeinschaft entwickeln und gestalten – Du bist herzlich aufgeordert, Deine Bearbeitungen beizusteuern!

Öffnen von Schulbuchaufgaben

Im Zentrum des Mathematikunterrichts stehen Aufgaben. Über Aufgaben werden Schüler/innen neue Inhalte nahegebracht. An Aufgaben üben sie, mit Aufgaben wird ihr Kenntnisstand überprüft.
Aufgaben fordern die Lernenden zum produktiven Umgang mit Mathematik auf. Auch deshalb ist jedes deutsche Mathematikbuch zu mindestens 80 % eine Aufgabensammlung und die Qualität eines Schulbuches wird wesentlich nach der Qualität der darin enthaltenen Aufgaben bestimmt.
Was sind aber Merkmale guter Aufgaben?
Kriterien hierfür finden sich im Buch von Büchter und Leuders "Mathematikaufgaben selbst entwickeln" Cornelsen 2005.
Es sind: Authentizität, Offenheit und Differenzierungsvermögen.

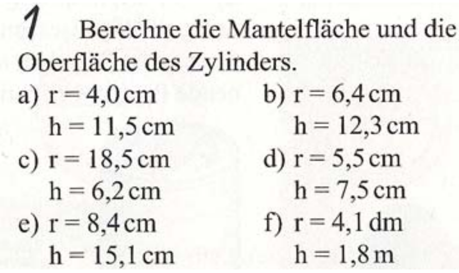
a) Eine Aufgabe ist authentisch, wenn sie zu mathematischen Tätigkeiten anregt, die typisch für die Entstehung und Anwendung von Mathematik sind.
b) Eine Aufgabe kann offen hinsichtlich der Ausgangsbedingungen, des Weges und des Ergebnisses sein.
c) Eine Aufgabe mit Differenzierungsvermögen bietet Lernenden die Möglichkeit mit unterschiedlichen Fragestellungen auf unterschiedlichen Niveaus und mit verschiedenen Methoden zu mathematischen Tätigkeiten.

Viele Schulbuchaufgaben zielen darauf, ein Verfahren, wie die Addition von Brüchen oder die Berechnung von Flächen durch eine Fülle gleichartiger Aufgaben einzuüben. Unterschiedliche Voraussetzungen und Fähigkeiten der Lernenden, sind dabei eher von untergeordneter Bedeutung. Die TIMMS-Studien und die Pisa-Ergebnisse haben die Schwächen dieser Lernstrategie vielfach belegt.
An den folgenden Beispielen wird gezeigt, wie sich traditionelle Schulbuchaufgaben öffnen lassen mit dem Ziel, Schüler/innen eigene Lernwege zu ermöglichen. Mit solchen selbstdifferenzierenden Aufgaben kann zudem auf unterschiedlichen Niveaus gearbeitet werden.

A) An Gleichungen wie $2x + 5 = 9$ soll die Äquivalenzumformung geübt werden.
   Mit verschiedenen Techniken kann die Aufgabe geöffnet werden. Leistungsstärkere Schüler/innen können ihre Fähigkeiten zeigen. Verschiedene Verfahren und Lösungen bieten Anlass zur Kommunikation
   Die veränderte Aufgabe: Die Lösungsmenge für die Gleichung $2x + 5 = 9$ ist 2.

a) Zeige das dies richtig ist. (Begründen)
b) Finde weitere Gleichungen mit der Lösungsmenge x = 2. (Zielumkehrung)
c) Verändere die Gleichung so, dass die Lösungsmenge zwischen -3 und 6 liegt. (Variation des Weges)
d) Wie verändert sich die Lösungszahl, wenn der Koeffizient vor dem x größer wird, wenn er sich dem Wert 0 nähert, wenn er negativ wird? (funktionale Abhängigkeit erkunden)

B) Im Mathematikbuch mathe live 9E (Ausgabe 2002), Seite 134 findet sich diese Aufgabe.


1 Berechne die Mantelfläche und die Oberfläche des Zylinders.

a) r = 4,0 cm h = 11,5 cm	b) r = 6,4 cm h = 12,3 cm
c) r = 18,5 cm h = 6,2 cm	d) r = 5,5 cm h = 7,5 cm
e) r = 8,4 cm h = 15,1 cm	f) r = 4,1 dm h = 1,8 m

Auch hier geht es um die Einübung eines Verfahrens. Es soll mit Hilfe einer bekannt gemachten Formel ein Rechenverfahren eingeübt werden.

Mit veränderten Maßzahlen für r und h, sowie einer anderen Fragestellung (funktionale Abhängigkeit) lässt sich aus der geschlossenen Aufgabe eine Selbstdifferenzierende erstellen.

Beispiel: Berechne die Mantelfläche und Oberfläche eines Zylinders, wenn
a) r = 4 cm; h = 24 cm; b) r = 4 cm ; h =12 cm;
c) r = 4 cm ; h = 6 cm
d) r = 8 cm ; h = 6 cm; e) r = 16 cm; h = 6 cm
f) r = 24 cm; h = 6 cm

Welche Zusammenhänge zwischen den gegebenen und errechneten Größen erkennst du?

Eine andere Möglichkeit wäre es die Aufgabe durch Umkehrung der Fragestellung zu verändern: Welche Längen können r und h annehmen, wenn die Oberfläche des Zylinders möglichst nah bei 1000 cm³ liegen soll? Vergleicht und diskutiert eure Ergebnisse.

Eine dritte Variation könnte sein: Stelle einen Zylinder mit möglichst großer Oberfläche aus einem A4-Blatt her. Berechne die Oberfläche deines Zylinders und gib den "Abfall" in Prozent an.

C) Auf der Seite 135 des gleichen Buches steht eine Aufgabe zur Litfasssäule.

4 Im Jahre 1855 errichtete Herr Litfaß die erste Reklamesäule in Berlin.
a) Eine Litfaßsäule hat eine Werbefläche von $9{,}42\,m^2$ und einen Durchmesser von 1,20 m. Berechne die Höhe der Säule.
b) Eine andere Plakatsäule hat eine Höhe von 3,25 m und einen Durchmesser von 1,45 m. Wie groß ist die Werbefläche?

Fragestellung und Datenvorgabe sind eindeutig.

Durch eine Öffnung der Datenvorgabe und des Weges wird auch hieraus eine selbstdifferenzierende Aufgabe.

Beispiel: Entwirf eine Litfasssäule auf die mindestens 12 DIN A1 Plakate passen. (DIN A1 hat die Maße 59,4 cm x 84,1 cm).
Eine andere Möglichkeit bietet sich, wenn Litfasssäulen in der Nähe der Schule stehen.
Fragestellung, Bearbeitungswege und Lösungen sind in dem folgenden Beispiel nicht eindeutig festgelegt. Lernende können den Schwierigkeitsgrad ihrer Aufgabe selbst bestimmen und sich Erfolge erarbeiten.

Litfasssäulen und City-Light-Säulen

In Hamburg werden seit August neuartige Litfasssäulen aufgestellt. Sie heißen City-Light-Poster-Säulen und stehen an viel befahrenen Kreuzungen. Zurzeit stehen etwa 500 solche Säulen im Stadtgebiet. Jede Woche kommen etwa 50 hinzu, so dass es einmal 900 Säulen mit 2700 Postern werden. Die Säulen drehen sich und können von innen beleuchtet werden.

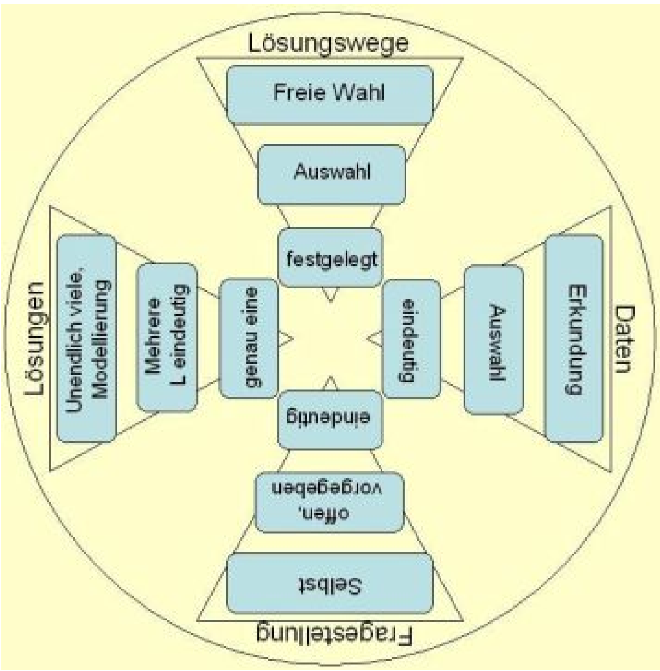
Arbeitsauftrag:
Gehe zu einer City-Light-Säule und zu einer herkömmlichen Litfasssäule.
Formuliere Aufgaben zu den Säulen die man mit Berechnungen beantworten kann.

Du brauchst für die Bearbeitung geeignete Messgeräte. Einige Größen musst du vielleicht auch schätzen.

Tipps für Aufgaben:

- Wie groß sind die Plakate?
- Welchen Umfang haben die Säulen?
- Welche Säule hat die größere Werbefläche?
- ...

D) Für die Öffnung von Aufgaben hat Michael Katzenbach die untenstehende "Drehscheibe entwickelt. (Mathematik lehren Heft 138 /2006) Sie ist ein einfach handhabbares Mittel zur Untersuchung von Schulbuchaufgaben.



"Im Zentrum der Drehscheibe stehen die eng vorgebenden Aufgaben, die sich in vier Richtungen hin zu einer größeren Selbstständigkeit und Entscheidungsfreiheit der Schüler/innen und Schüler öffnen lassen. Außer den Aspekten "Fragestellung" und "Daten" enthält die Drehscheibe die Kategorien "Lösungswege" und "Lösungen". Die Beschreibungen für den minimalen, einen mittleren und den maximalen Öffnungsgrad sind dabei nicht eindeutig.

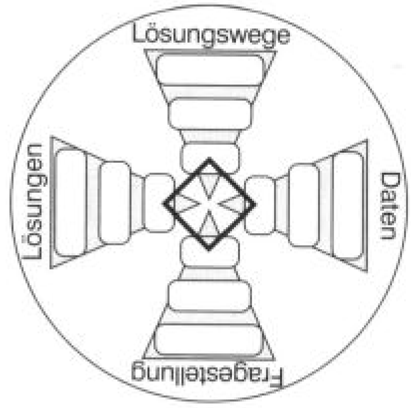
Methodisch besteht eine Möglichkeit darin, offene Aufgaben von der Klasse im Ich – Du – Wir – Prinzip bearbeiten zu lassen:

- Zunächst entwickelt jede Schülerin und jeder Schüler für sich eine Idee, einen Ansatz, eine Rechnung, vielleicht sogar schon eine Lösung.
- Daraufhin werden die Vorschläge in Partner- oder Kleingruppen-Arbeit ausgetauscht, besprochen, korrigiert.
- Schließlich werden sie im Klassenplenum vorgestellt und dort erneut diskutiert. Die Wertschätzung der verschiedenen Arbeitsergebnisse ist sehr wichtig.

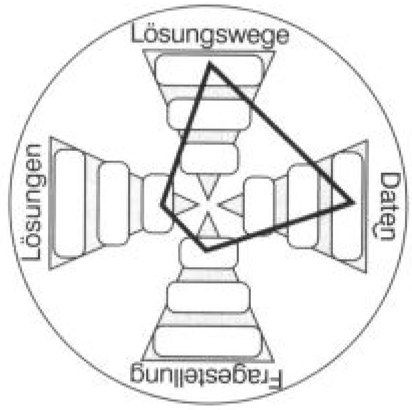
Dieser Prozess kostet Zeit, fördert aber die Selbstständigkeit der Schüler/innen."

Beispiele zum Umgang mit der Drehscheibe

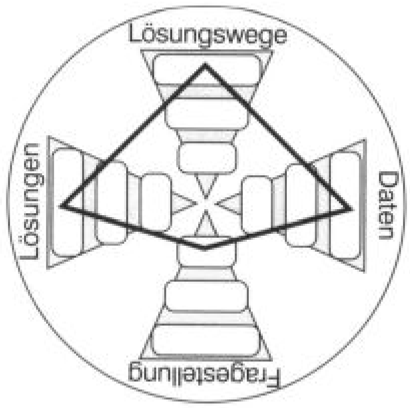
Ein Versand verschickt 3600 gleiche Pakete. Sie wiegen zusammen 2160 kg. Wie viel wiegt ein Paket? Rechne schriftlich.
Eine solche Aufgabe ist in jeder Kategorie eindeutig bestimmt. Trotz der Entfernung zur Realität ist sie in ähnlicher Form auch in aktuellen Schulbüchern zu finden. Verbindet man die entsprechenden Felder, so entsteht die kleinstmögliche Fläche im Diagramm.



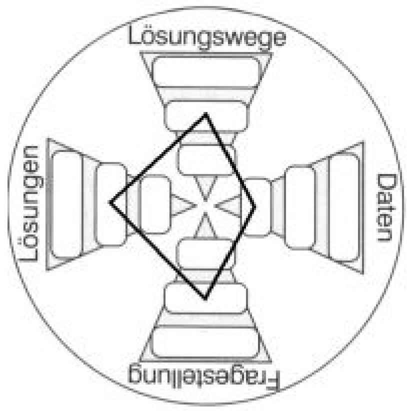
Um wie viel Prozent stieg die Einwohnerzahl deiner Stadt von 1998 bis 2003?
In dieser Aufgabe müssen Daten erkundet werden. Das Lösungsverfahren ist nicht vorgeschrieben. Hier öffnet sich die Aufgabe in zwei Richtungen.



Welche Getränke sollen beim nächsten Schulfest angeboten werden? Zu welchen Preisen sollen sie verkauft werden? Überlege dir, wie du deinen Vorschlag in der nächsten SV-Sitzung begründest.
Bei dieser Aufgabe ist nur die Fragestellung vorgegeben.



Ein Wasserkanister soll 10 Liter fassen. Mache Vorschläge.
Ein Beispiel zur Öffnung der obigen Quaderaufgabe durch Umkehrung. Diese Aufgabe macht deutlich, dass die Beurteilung der Offenheit auch immer vom Unterrichtskontext anhängt. So ist die Einordnung im Diagramm zu verstehen vor dem Hintergrund soeben behandelter Volumenformeln für eine Reihe anderer Körper. In so fern liegt faktisch eine Situation der Auswahl möglicher Lösungswege vor.



Produktives Üben

"Üben kann eine abwechslungsreiche Sache sein, wenn es nicht nur darum geht, mit Aufgabenpäckchen Fertigkeiten zu trainieren, sondern wenn das Üben Hand in Hand geht mit mathematischen Entdeckungen und Reflexionen", so Timo Leuders in seinem Artikel über produktives Üben (www.hs-anger.at/download/Produktives_Ueben_ist_keine_Zauberei_Weiz.pdf).
Das Üben von Rechenfertigkeiten stellt einen wichtigen Baustein in unserem Mathematikunterricht dar, doch viel zu oft dient er eher als "Krafttraining" oder wird in die Hausaufgabe verlagert. Mit der Idee des intelligenten (oder auch produktiven) Übens können nicht nur allgemeine Fertigkeiten trainiert werden, sondern die Problemlösefähigkeit, das Untersuchen von Strukturen oder das vernetze Denken können geschult werden. Darüber hinaus sollte durch produktive Übungsaufgaben eine individuelle Förderung möglich sein, so dass die schwächeren Schülerinnen und Schüler die jeweiligen Aufgaben problemlos lösen und somit üben können, die Stärkeren jedoch Strukturen erkennen bzw. Bezüge beschreiben zu können.
Der interessierte Leser denkt sich jetzt bestimmt: "Das klingt spannend, aber das ist doch nur wieder mit viel Mehrarbeit zu leisten!" Diese Frage kann zum Glück in vielen Fällen mit NEIN beantwortet werden, denn schon kleine Veränderungen können auch aus Päckchenaufgaben im Schulbuch ein produktives Üben ermöglichen. Doch leider lautet die Antwort auch JA, da produktive Übungsaufgaben nicht für jedes Thema bzw. jede Aufgabenkultur leicht umzusetzen ist. Die folgenden Beispiele sollen dem Leser jedoch Mut machen, erste Ideen in die Tat umzusetzen, um die zahlreichen Vorteile für den Unterricht zu erfahren.

Ein Beispiel aus einem Schulbuch (Ordnen von Dezimalzahlen):

6 Gib jeweils die kleinste und die größte Zahl an.
a) 3,088; 8,033; 3,80; 8,30
b) 1,0101; 1,1; 1,101; 1,11; 1,01
c) 2,304; 3,042; 3,24; 2,40; 2,0432
d) –6,7; –7,56; –6,57; –7,6; –6,75

7 Ordne aufsteigend der Größe nach.
a) 0,7; 0,8; 0,9; 0,10; 0,11; 0,12
b) 0,1; 0,003; 0,00005; 0,04; 0,0002
c) 0,505; 5,05; –5,505; 5,055; –0,550
d) 1,234; 2,014; 2,12; 2,300; 1,24
e) 3,9; 0,93; 3,09; 3,093; 3,0099

Anstelle des Aufgabentextes (siehe Abbildung) könnte die Aufgabe umformuliert werden:

a) Ordne insgesamt fünf Teilaufgaben aus Aufgabe 6 und 7 aufsteigend der Größe nach. Beginne dabei mit der für dich einfachsten Aufgabe, die letzte Teilaufgabe sollte die für dich Schwierigste sein.
b) Formuliere in einigen Sätzen, wie die Zahlen beim Ordnen von Dezimalzahlen ausgesucht sein müssen, damit eine Aufgabe leicht bzw. schwer wird und begründe deine Entscheidung.

Einige Fragestellungen für das Erstellen von produktiven Übungsaufgaben sind in folgender Tabelle aufgeführt (in Anlehnung an Timo Leuders):

(P) „Löse das Problem und übe dabei…“

Aufgabentyp Problemlösen		Mögliche Aufgabenformulierung und Beispiele aus der Dezimalrechnung
Operatives Durcharbeiten	Umkehraufgabe	Wann kommt … heraus? • Gib fünf Dezimalzahlen an, die die Summe ___ haben.
	Optimierung	Wann ist … am größten / am kleinsten? Mit welchen Zahlen kannst du deine Lieblingszahl multiplizieren, um ein möglichst großes / möglichst kleines Ergebnis zu erhalten?
	Kombinatorische Ausschöpfung	Wie viele Möglichkeiten gibt es? • Wie viele verschiedene Terme kannst du berechnen, wenn du vier verschiedene Dezimalzahlen zur Verfügung hast und du jede Zahl nur einmal vorkommen darf. Mit welchen Rechenoperationen bekommst du kleine / große Endergebnisse?
Eigene Aufgaben erarbeiten	Variieren	Verändere die Aufgabe (welche kannst du genauso bearbeiten, wo benötigst du andere Hilfsmittel / Informationen?).

(S) „Untersuche das Muster … und übe dabei“

Aufgabentyp Strukturen reflektieren		Mögliche Aufgabenformulierung und Beispiele aus der Dezimalrechnung
Muster erkennen und erzeugen	Muster suchen	Berechne, welches Muster kannst du entdecken?
	Muster fortsetzen	Wie lässt sich das Muster fortsetzen?
und darüber argumentieren	Analogisieren	Wie lauten ähnliche Aufgaben? Warum sind sie ähnlich?
	Muster begründen	Wieso kommt dieses Muster heraus?

12,3 + 4,5 = 16,8
23,4 + 5,6 =
34,5 + 6,7 =
45,6 + 7,8 =

Strukturieren	Sortieren / Klassifizieren	Von den beiden Aufgaben musst du nur eine rechnen, welche wählst du und warum? a) -3,6 + 25,8 + 3,6 – 1,2 – 25,8 3,6 + 25,8 + 3,6 – 1,2 b) $-0,5 + \frac{3}{4} + 10,38 - 0,75 + \frac{1}{2}$ -0,5 + 2,83 + 10,38 – 0,75 + 2,9
	Bewerten	Suche die schwierigsten / leichtesten / ... Aufgaben heraus. • Suche die Aufgaben heraus, die du ohne großen Rechenaufwand lösen kannst. a) 1,4· 1,4 b) 5,5 : 100 c) 7,5 : 5,7 d) 4,2 · 6 + 4,2 · 4 e) 100 : 5,5 • Setzt euch zu viert zusammen und sammelt Aufgaben mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad zum Thema geschicktes Rechnen mit Dezimalzahlen.

(A) „Erkunde die Situation ... und übe dabei"

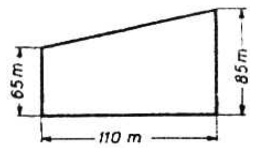
Aufgabentyp Anwendungen erkunden		Mögliche Aufgabenformulierung und Beispiele aus der Dezimalrechnung
Anwenden auf Beispiel- oder Sachsituationen	an Beispielen anwenden	Wende ... bei der Bearbeitung folgender Situation an. • Michaela ist beim Weitsprung 2,30 m und 2,45 m gesprungen. Sie möchte auf einen Durchschnitt von 2,40m in drei Sprüngen kommen.
	Anwendungen erfinden	Erfinde weitere Situationen, in denen du ... anwenden kannst. • Sammelt in eurer Aufgaben Zeitungsartikel aus dem Sportteil, mit denen ihr Aufgaben mit Dezimalzahlen formulieren könnt.
Vernetzen mit verwandten Begriffen / Situationen	Verbindungen erfassen / suchen	Wie passt das zu ...? • Kannst du Verknüpfungen bei den Rechenregeln von natürlichen Zahlen, Dezimalzahlen oder Brüchen finden?
	Übertragen	Wie lässt sich ... auf ... übertragen?

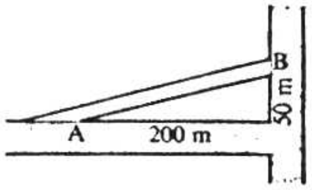
Doch nicht nur bei Päckchenaufgaben kann produktiv geübt werden, auch die Aufgaben in der MUED können so umformuliert werden, dass neben dem reinen Übungscharakter zusätzliche Fähigkeiten entwickelt werden können. Ein Beispiel aus der AG der Jahrestagung in Kassel:

bisherige Aufgabe aus: 09-04-06 Pythagoras Aufgabensammlung

Zäune, Wege u. a.

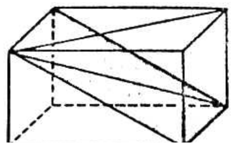
1. Wie viel Meter Zaun sind für dieses Grundstück nötig?





2. Von A nach B führt eine schmale, meist stark begangene Gasse. Lohnt sich die Abkürzung, wenn man zu ihrer Durchquerung 20 % mehr Zeit benötigt als auf den beiden Hauptstraßen?

3. Ein Quader ist 7 cm lang, 5 cm breit und 4 cm hoch. Berechne die Länge der Raumdiagonalen.



Mögliche Formulierung für produktive Übungsaufgaben:

<u>zu Aufgabe 1</u>

- Schätze die Länge der fehlenden Seite des Grundstückes.
- Die Seite c soll 120 m lang sein. Bestimme den Umfang des Grundstückes. Prüfe dein Ergebnis durch ein weiteres Verfahren.
- Ein trapezförmiges Tauschgrundstück hat einen Umfang von 400 m. Konstruiere ein solches Grundstück. Sollte man in jedem Fall auf diesen Tausch eingehen? Begründe deine Entscheidung durch Rechnung.
- Finde mindestens ein weiteres trapezförmiges Grundstück mit einer Fläche von 8250 m².

<u>zu Aufgabe 2</u>

- Ersetze "meist" durch "während der Rush hour" und 20 % durch 30 %. Wann lohnt es sich die Gasse zu benutzen?

zu Aufgabe 3

- Du hast einen 30 cm langen Zauberstab. Finde einen quaderförmigen Kasten in den er gerade hineinpasst.
- Welcher von den gefundenen Quadern hat das kleinste Volumen?
- Gibt es einen Kasten mit dem kleinsten Volumen?

Weiteres Beispiel aus 56-01-02 Gulliver:

Ich muss wohl an die neun Stunden geschlafen haben, denn als ich erwachte, war der Tag angebrochen. Ich versuchte aufzustehen, konnte mich aber nicht bewegen, denn das ich auf dem Rücken lag, fand ich meine Arme und Beine fest an den Boden gebunden. Dasselbe war mit meinen sehr langen und dicken Haaren geschehen. Quer über meinen Leib, von den Schulterhöhlen bis zu den Schenkeln, fühlte ich mehrere straff gespannte dünne Stricke. Ich konnte nur aufwärts blicken. die Sonne wurde heiß, und ihr Licht blendete meine Augen. Ganz nahe vernahm ich ein wirres Geräusch; in meiner Lage jedoch konnte ich nur den Himmel sehen.
Mittlerweile spürte ich, wie sich etwas auf meinem linken Schenkel bewegte; es rückte leise vorwärts und kam über meine Brust bis fast an mein Kinn. Ich verdrehte die Augen so weit wie möglich nach unten und erkannte ein menschliches Wesen von etwa sechs Zoll Höhe, mit Bogen und Pfeilen in der Hand und mit einem Köcher auf dem Rücken. Zugleich bemerkte ich, wie wenigstens vierzig weitere folgten. Ich war äußerst erstaunt und brüllte so laut, dass alle erschrocken fortliefen; einige, wie ich später hörte, stürzten und verletzten sich, als sie von meiner Seite herabspringen wollten. Sie kamen aber bald wieder. Eines von ihnen wagte sich so weit, dass es in mein Gesicht blicken konnte, erhob voll Bewunderung Hände und Augen und rief mit schriller, doch deutlicher Stimme: "Hekinah Degul." Die übrigen wiederholten die Worte mehrere Male; doch damals konnte ich ihren Sinn noch nicht verstehen.
Der Leser wird wohl glauben, dass ich mich in keiner bequemen Lage befand. Ich suchte loszukommen und hatte zuletzt das Glück, die Stricke zu zerreißen und die Pflöcke herauszubrechen, an denen mein linker Arm befestigt war. Als ich ihn nun zum Gesicht erhob, erkannt ich die Methode, nach der man mich gebunden hatte. Mit einem heftigen Ruck, der mir viel Schmerz verursachte, lockerte ich ein wenig die Stricke, die mein Haar auf der linken Seite festhielten. Jetzt war ich imstande, meinen Kopf zwei Zoll weit zu drehen; allein die Geschöpfe liefen ein zweites Mal fort, ehe ich eines ergreifen konnte. Darauf erhob sich ein lauter und sehr schriller Schrei. Nachdem er verhallt war, hörte ich, wie einer laut "Togo Phonac" rief.

AB – Gulliver und die Liliputaner

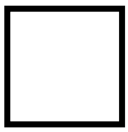
Gulliver ist 1,80 m groß. Die kleinen Geschöpfe aus Liliput sind 6 Zoll groß. Ein Zoll ist 2,5 cm.

1. Wie groß ist ein Mensch in Liliput? Schreibe deine Überlegungen auf.
2. Lege das Blatt quer. Zeichne einen Menschen aus Liliput in Originalgröße und notiere, wie du auf deine Lösung gekommen bist.
3. Wie viele Menschen aus Liliput müsste man aufeineinander stellen, um die Länge von Gulliver zu erreichen? Schreibe deine Rechnung auf.

AB – Gullivers Taschentuch

Natürlich muss Gulliver sich auch einmal die Nase putzen. Ein Liliputaner-Taschentuch ist ihm zu klein. Die Liliputaner nähen ihm deshalb aus vielen kleinen Taschentüchern eines, was zu seiner Größe passt.

1. Zeichne das Taschentuch von Gulliver. Abgebildet ist ein Liliputaner-Taschentuch.



2. Eine Frau aus Liliput findet Gullivers frisch gebügeltes Stofftaschentuch. Was könnte sie damit anfangen?
3. Aus wie vielen Liliputaner-Taschentüchern wird das Taschentuch für Gulliver zusammengenäht? Wie sieht deine Rechnung aus?

AB – Wir sind die Liliputaner

1. Um wie viel ist Gulliver größer als die kleinen Menschen in Liliput?
2. Wie groß wäre Gulliver etwa, wenn wir die Menschen aus Liliput wären? Schreibe deine Rechnung auf.
3. Wie lang wäre sein Schuh oder Kamm?
4. Wie lang wäre sein Bleistift, seine Federmappe, sein Matheheft?

Erkundungen als Ausgangspunkt von Begriffsbildungen

Spätestens seit der Jahrestagung 2006 "Wege zur mehr Selbstständigkeit im Mathematikunterricht" (siehe auch Rundbrief 161) werden in der MUED so genannte Erkundungsaufgaben intensiver diskutiert. Es handelt sich um einen Typ offener Aufgaben, der insbesondere zu Beginn einer Unterrichtsreihe zum Entdecken oder Erfinden eines für die Schüler/innen bis dahin unbekannten Stücks Mathematik anregen sollen. "Die Aneignung mathematischer Kenntnisse und Fähigkeiten, ist aus der Sicht des Konstruktivismus eine im Kern individuelle Leistung. Danach muss die Mathematik im Kopf des Lernenden neu konstruiert werden. Ein solcher lerntheoretische Ansatz verlangt geradezu nach selbstständigem Lernen auf individuellen Lernwegen. Erkundungen haben im Unterricht die Aufgabe, Vorerfahrungen der Lernenden zu aktivieren, ihnen Zugang zu einem neuen Thema zu verschaffen, Entdeckungen zu ermöglichen, eigene Wege zu verfolgen. Sie knüpfen an die Erfahrungen der Schüler/innen an, müssen für sie bedeutsam sein.

Erkundungen sind notwendigerweise komplex und zunächst unstrukturiert in dem Sinne, dass die Aufgabenstellung nicht schon die Sachstruktur in vermeintlich passenden Häppchen präsentiert; Erkundungen

- reichen weit in das Thema hinein
- ermöglichen unterschiedliche Zugänge
- aktivieren die Selbsttätigkeit der Lernenden
- sind offen
- erlauben divergierende Vorstellungen.

Eine zentrale Voraussetzung für selbstständiges Arbeiten ist aber auch die inhaltliche Begründung der Aufgabenstellung. Wichtige Eigenschaften guter Erkundungsaufgaben sind deshalb auch

- Bedeutsamkeit (konstruktivistisch gesprochen: Relevanz)
- und Authentizität.

Sie fördern damit die Bereitschaft zur Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten und Methoden und führen zum Entstehen mathematischer Konzepte aus der Anschauung und aus dem Problemlösen heraus. Selbstständigkeit beginnt in diesem Sinne, wenn sich ein Lernender mit einem mathematischen Problem auseinandersetzt. Dazu braucht es Zeit, anregendes Material, Beratung jedoch keine Belehrung. Bei der Bearbeitung durch die Schüler steht der individuelle Lernweg im Vordergrund, Die Rolle des Lehrers beschränkt sich auf Beratung, Tipps und weiterführende Fragen."
(www.mued.de/Unterrichtskultur/Erkundungen)

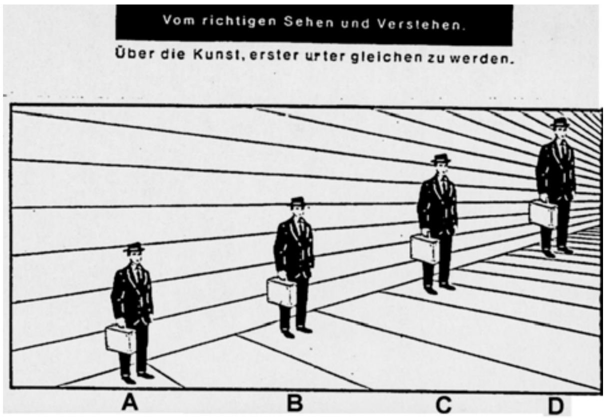
Es ist beabsichtigt, dass in der Materialdatenbank nach und nach zu jedem Unterrichtsthema auch ein Umschlag mit Erkundungen zu finden sein wird. Zur Zeit entstehen UEs mit der Nummer ... – 01. Sie enthalten Ideen für Erkundungen als Einstieg in ein Thema.

Die .. –01 er Umschläge sind zur Zeit im Aufbau. MUED bedeutet: guten Unterricht in einer guten Arbeitsgemeinschaft entwickeln und gestalten – Du bist herzlich aufgefordert, zum Projekt Erkundungen beizusteuern!

Im Folgenden werden Beispiele und Ideen vorgestellt.

A) Von einem Materialschnipsel zu einer Erkundungsaufgabe zum Begriff der Ähnlichkeit

Auf der Suche nach einer Aufgabe, die zu zentralen Ideen des Ähnlichkeitsbegriffs führt, bin ich in der UE 09-06-05 auf untenstehende Abbildung gestoßen. Zentrale Ideen sind m.E. die Eigenschaften der Ähnlichkeit: Parallelentreue, Verhältnistreue, Winkeltreue. Der Begriff der Ähnlichkeit präzisiert und begrenzt in diesem Sinne Alltagsvorstellungen von Ähnlichkeit. Die zentrische Streckung antwortet dann auf die Frage nach der konstruktiven Erzeugung maßstabstreuer Figuren, der Streckfaktor beantwortet die Frage nach der Quantifizierung des Maßstabs (was soll eine Verdopplung einer Figur bedeuten?). Die Strahlensätze schließlich loten aus, welche Größen bei bekanntem Streckfaktor in verschiedenen Konstellationen ermittelt werden können.



Die optische Täuschung weckt zunächst Interesse (Zugänglichkeit) und regt zu ersten Untersuchungen an (Herausforderung): Wie groß sind die Figuren und wie groß müssten sie sein. Die zweite Frage führt auf die Auseinandersetzung mit "korrekten" perspektivischen Darstellungen (ein authentisches mathematisches Problem) und legt die Verbindung mit dem Kunstunterricht nahe.

Die Ausgangssituation ist hinreichend offen und variabel, um weitere Fragen zu motivieren, z. B. nach einem eleganten Vergrößerungsverfahren (ein "echtes Problem", da die Figuren komplex sind), nach der exakten Beschreibung von Unterschieden und Gemeinsamkeiten der Figuren und nach der Quantifizierung der Vergrößerung. Die Situation enthält also die oben genannten Kernideen (Bedeutsamkeit). Es sind verschiedene Wege zur Beantwortung der Fragen denkbar, wobei die "Tapete" im Hintergrund als Hilfe genutzt werden kann. Auch die möglichen Ergebnisse im Sinne von zu formulierenden Begriffen und Verfahren sind zunächst nicht durch die Situation festgelegt (z. B. sind unterschiedliche "Definitionen" von Ähnlichkeit denkbar). Schließlich erscheint mir auch eine Diskussion der Werbebotschaft erstrebenswert (emanzipatorische Dimension). Zunächst würde ich die Schüler/innen mit der oben stehenden Grafik ohne spezifische Fragestellung konfrontieren und Beobachtungen und Fragen auf einem Speicherplakat sichern: Wie groß müssten die Figuren sein für eine stimmige perspektivische Wirkung? Wie können die Figuren exakt vergrößert werden? Worin unterscheiden sich die Figuren, worin stimmen sie überein? Dann werden gemeinsam mit der Klasse "Forschungsaufträge" formuliert und in einer Erkundungsphase (z. B. mit kooperativen Verfahren) bearbeitet.

B) Begriffsentwicklung in relevanten Kontexten

Das Beispiel a) ist wohl kaum im Sinne der MUED handlungsorientierend in emanzipatorischer Absicht. In 08-08-01 findet sich eine Idee zum Einstieg in den Funktionenbegriff anhand der Fragestellung, ob bzw. wie sich das Weltklima langfristig verändert hat. Die Frage nach der Klimaveränderung ist unmittelbar anschaulich und leicht zugänglich. Ausgehend von der offenen Frage "Verändert sich unser Klima?" können Schüler/innen selbstständig geeignete Daten recherchieren und geeignete Darstellungsmittel entwickeln: Tabelle, Diagramm, verbale Beschreibung. Dabei können die Schüler/innen auf ihr Alltagsverständnis sowohl von Klimaphänomenen (Temperatur, Niederschlag, Pegelstände, ...) als auch von Veränderungen aufbauen. Insbesondere kann (schulisches) Vorwissen aus dem Fach Erdkunde eingebracht werden. Hier liegt auch eine Chance für fächerverbindendes Arbeiten.

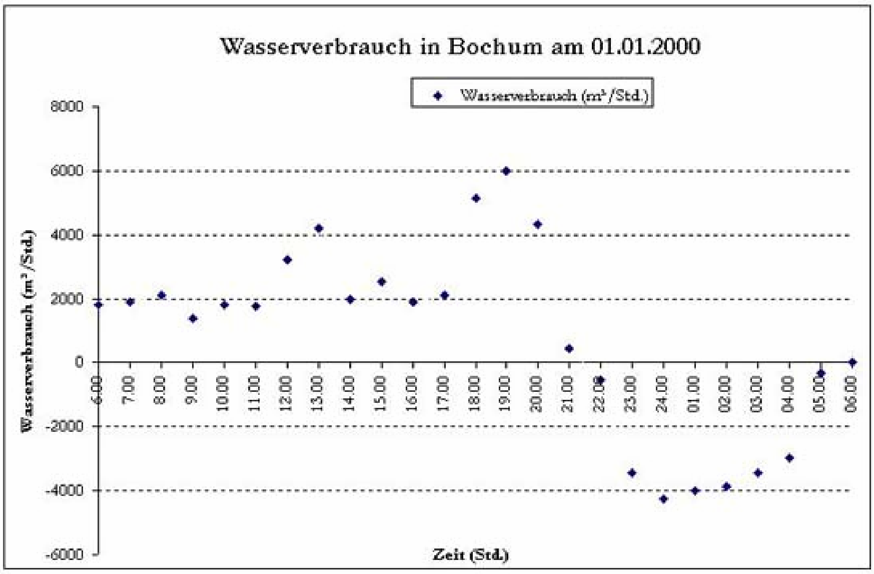
Die deskriptive Analyse von Klimadaten ist reichhaltig genug, um alle relevanten Aspekte des Funktionsbegriffs aufzurufen. Klimainformationen liegen meist als mehr oder minder strukturierte Tabellen vor oder als Klimadiagramm, selten auch als verbale Beschreibung. Damit sind drei der vier ausgewiesenen Beschreibungselemente Wertetabelle, Graf, (eigene) Worte und Term angesprochen. Die Leitfrage nach der langfristigen Veränderung fordert zu Interpretation auf und damit zur Verbalisierung vorgefundener Tabellen und Diagramme. Um die oftmals unübersichtlichen Tabellen besser überblicken zu können, bietet es sich an, Daten in ein Diagramm oder einen Grafen zu übersetzen. Schließlich werden Diagramme zur genaueren Untersuchung der Quantitäten in Tabellen übertragen. Gleichzeitig machen sich die Schüler/innen auf die Suche nach geeigneten Worten, um ihre Ergebnisse möglichst präzise zu beschreiben. So werden auch Kompetenzen im Bereich Kommunizieren/Argumentieren angesprochen und trainiert.

Durch eine einfache Frage kommt ein innermathematisches Problem hinzu: Wie wird das Klima im Jahr 20xy sein? Die konkrete Prognose einer Größe (z. B. Jahresmitteltemperatur) im Sinne einer qualitativen Extrapolation können die Schüler/innen über einen grafischen Zugang ermitteln. Sie können sich aber auch als "Datendetektive" versuchen, um numerischen Zusammenhängen auf die Spur zu kommen. Häufig finden sich in veröffentlichten Darstellungen zum Klimawandel Trendlinien oder Ausgleichskurven, zum Teil auch als Geraden. Beim Versuch, selber passende Trendlinien zu finden und insbesondere Ausgleichsgeraden per Augenmaß einzutragen, werden erste Erfahrungen mit Eigenschaften von linearen Zuordnungen gesammelt.

C) Erkundungen, die auf Begriffe der Sekundarstufe II führen (vektorielle Geometrie, Integralbegriff)

LA-01-01 stellt einen Weg in die vektorielle Geometrie dar, der in hohem Maße die Selbsttätigkeit der Schüler/innen anregt. Der zentrale Erkundungsauftrag "Flugsicherheit" stammt aus Hußmann, S.: Mathematik entdecken und erforschen, Cornelsen 2003. Dort finden sich weiterer Anregungen, ebenso wie in MSW NRW (Hrsg.): Wege zu selbstreguliertem Lernen, Klett 2007. Insbesondere der dort vorgestellte Weg zum Integralbegriff ist sehr empfehlenswert. Dazu gehört z. B. dieser Auftrag:

Zeit (Std.)	Wasserverbrauch (m³/Std.)
6.00	1800
7.00	1900
8.00	2100
9.00	1400
10.00	1800
11.00	1765
12.00	3236
13.00	4219
14.00	1989
15.00	2549
16.00	1888
17.00	2119
18.00	5129
19.00	5988
20.00	4322
21.00	430
22.00	-543
23.00	-3450
24.00	-4229
1.00	-3998
2.00	-3887
3.00	-3456
4.00	-2987
5.00	-327
6.00	23



Der größte Teil Bochums wird mit Trinkwasser der Wasserwerke in Stiepel und Essen-Horst versorgt. Ausgenommen hiervon sind die Ortsteile Werne und Langendreer. Hier liefert das Verbund-Wasserwerk Witten das Wasser. Das Wasserwerk Stiepel wurde 1910 von den Stadtwerken Bochum gebaut. Es umfasst Ruhrstau, Wasserkraftanlage, Wassergewinnungsanlage und Pumpwerk. Um die Bevölkerung jederzeit mit Wasser zu versorgen, ist es wichtig, dass die Anlage optimal ausgenutzt wird.

Ausgangspunkt für die optimale Ausnutzung ist der aktuelle Verbrauch der Bevölkerung. Dieser wird mit Hilfe von Fühlern, die in den Verbrauchswasserstrom ragen, gemessen. Damit immer Wasser vorhanden ist, wird Wasser gewonnen und aufbereitet und den Wasserbecken zugeführt. Dieser Zustrom wird ebenfalls mit entsprechenden Fühlern gemessen. Für den Verlauf eines Tages wird in der Tabelle und der zugehörigen Abbildung die Bilanz der gemessenen Werte angegeben. Bei den Werten handelt es sich um den momentanen Wasserverbrauch. Die Stadtwerke Bochum nutzen die Tageskurven, um Prognosen hinsichtlich der optimalen Wassergewinnung für zukünftige Tage treffen zu können.

Ist die produzierte Wassermenge ausreichend, um die Bevölkerung Bochums mit Wasser zu versorgen?

Die meisten Aufgaben dort sind nicht im engen Sinne MUED-gerecht, die darin liegenden Ideen können allerdings manchmal mit MUED-Material angereichert werden. Aufgaben aus dem MUED-Klassiker "Erschöpfungszeit nicht regenerierbarer Energiequellen" (AN-09-21) können z. B. statt als Anwendungsaufgaben nach der Einführung der Integralrechnung in modifizierter Form zu Beginn eingesetzt werden und so zur Idee der Kumulation und zur Schlussweise von der Änderungsrate auf den Bestand führen:

Wie lange reicht unser Öl noch?

Sie finden hier eine aus verschiedenen Quellen zusammengestellte Übersicht über die Welt-Erdöl-Förderung. (Alle Angaben in Mio. t):

Jahr	**1860**	**1870**	**1880**	**1890**	**1900**	**1910**	**1920**
Förderung q(t)	0,07	0,8	4,1	10,6	20,5	44,9	95,9
Jahr	**1930**	**1935**	**1940**	**1945**	**1950**	**1955**	**1960**
Förderung q(t)	197,2	230	293	366	525	769	1055
Jahr	**1965**	**1970**	**1973**	**1974**	**1975**	**1976**	**1978**
Förderung q(t)	1512	2334	2833	2850	2768	2879	3251
Jahr	**1979**	**1980**	**1990**	**2000**	**2004**		
Förderung q(t)	3251	2789	3164	3605	3821		

Die Zeit, bis zu der die erschließbaren Vorkommen eines Rohstoffs reichen werden, nennt man die Erschöpfungszeit (im Jahr 2000 wurden die Welt-Erdöl-Reserven auf 139,6 Mrd. t geschätzt).

MUED bedeutet: guten Unterricht in einer guten Arbeitsgemeinschaft entwickeln und gestalten – Du bist herzlich aufgeordert, Deine Bearbeitungen beizusteuern!

Programm der MUED-Sommertagung
vom 21.05. – 23.05.2009 in Haltern

Verantwortlich: MUED-Planungsrat (Heinz Böer, Daniela Breuer, Volker Eisen, Joachim Kamp, Sabine Segelken, Antonius Warmeling)

Donnerstag, 21.05.2009

12.00 Uhr	Anreise und Mittagessen für Planungsrat ♦ Planungsratsitzung
bis 18.00 Uhr	Anreise
18.30 Uhr	Abendessen
19.30	Plenum: ♦ Bericht des Planungsrates ♦ Arbeitsgruppen vorstellen und bilden ♦ Endgültige Programmgestaltung ♦ Vorstellung neuer Broschürenprojekte

Freitag, 22.05.2009

Vormittag	Arbeitsgruppen zu: ♦ Jahrestagung (Sabine) ♦ UE-Entwicklung in Richtung neue Unterrichtskultur (Daniela, Heinz) ♦ Homepageinhalt (Antonius, Volker) Plenum: Zwischenberichte aus den Arbeitsgruppen
Mittagspause	
Nachmittag	Fortsetzung Arbeitsgruppen
Abend	

Sonnabend, 23.05.2009

Vormittag	Fortsetzung Arbeitsgruppen Plenum: Vorstellung und Diskussion der Ergebnisse
Mittag	Essen und Abfahrt

<u>Wegbeschreibung</u>

Sie erreichen die Heimvolkshochschule

Mit der Bahn:
Von den IC/EC-Bahnhöfen Essen, Recklinghausen oder Münster nach Haltern mit Regional-Bahnen oder Stadtexpress-Zügen (Streckenlinie 425).
Von dort ist der Annaberg in 45 Minuten zu Fuß oder mit der Buslinie 298 (ab Bahnhofsvorplatz, stündlich) zu erreichen. Von der Haltestelle „Annaberg“ bis zum Haus sind es zehn Minuten zu Fuß.

Mit dem PKW:
- Aus Richtung Münster oder Recklinghausen von der Autobahn A 43, Abfahrt Nr. 8 „Haltern“ auf die B 58, in Richtung Haltern weiter, nach ca. 100 m rechts abbiegen.

Jeweils der Beschilderung „Annaberg“ folgen.