Der Laplace-Bleistift – oder nicht?

Benötigt werden: Sechsseitige Bleistifte, die auf den Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet werden.

a) Arbeitet zu zweit: Eine/r von euch rollt den Bleistift, der/die andere dokumentiert die Ergebnisse.
   (i) Rollt den Bleistift insgesamt 60 Mal und tragt die Anzahl der gefallenen Nummern in Form einer Strichliste in die Tabelle ein.
   (ii) Notiert die absoluten Häufigkeiten und berechnet anschließend die relativen Häufigkeiten, mit denen die jeweiligen Seiten geworfen wurden.

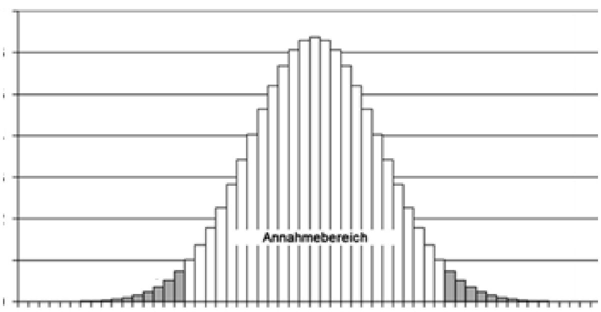
	Seite 1	Seite 2	Seite 3	Seite 4	Seite 5	Seite 6
Strichliste						
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit						

b) Stellt eine Vermutung auf, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt. Begründet eure Meinung.

c) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der „1“en an. Schätzt: Wie viele „1“en muss man bei 60 Würfen mindestens sehen, wie viele darf man höchstens sehen, um davon auszugehen, dass es sich um ein Laplace-Experiment handelt? Bei welchen Werten von X würdet ihr zweifeln, ob es sich um ein Laplace-Experiment handelt?

d) Überprüft, ob eure gerollten Ergebnisse für die Seite „1“ bei 60 Versuchsdurchgängen mit den zu erwartenden Ergebnissen bei einem Laplace-Experiment übereinstimmen oder ob die Ergebnisse signifikant von den Erwartungen abweichen.

Dazu kann man mit einem sogenannten Hypothesentest ein Intervall festlegen: den Annahmebereich $A = [a; b]$ der Hypothese $p = \frac{1}{6}$.
Liegt ein Stichprobenergebnis im Annahmebereich, akzeptiert man die Hypothese, andernfalls verwirft man sie.



e) Bestimmt rechnerisch den Annahmebereich, in dem 90 % aller Treffermöglichkeiten liegen sollen.

f) Überprüft, ob euer Stichprobenergebnis im Annahmebereich der Hypothese liegt. Was bedeutet das für euren Bleistift und die Hypothese, dass alle Bleistifte Laplace-Bleistifte seien?

g) Probiert und begründet: Was verändert sich, wenn man die prozentuale Größe des Annahmebereichs vergrößert oder verkleinert?

Bearbeitung

a) Für die Tabelle sind keine Lösungen zu antizipieren, weil es sich um Zufallsversuche handelt. Es ist davon auszugehen, dass sich sehr unterschiedliche Häufigkeitsverteilungen ergeben werden. Genau dies dient der Motivation für die weitere Erarbeitung.

b) Vermutlich werden die Schülerinnen und Schüler unterschiedlicher Meinung sein. Einige halten ihre Ergebnisse für nah genug an einer Gleichverteilung der Wahrscheinlichkeiten (Laplace), andere werden die Fairness des Bleistiftes anzweifeln, weil die Verteilung zu ungleich ist. Wichtig ist der Bezug zur Laplace-Definition.

c) Auch hier werden sehr unterschiedliche Meinungen vorherrschen. Möglicherweise wird auf den Erwartungswert von 10 Bezug genommen, so dass dieser als Richtwert gilt und ein Intervall um diesen herum angenommen wird. Wie groß das Intervall gewählt wird, hängt von den Schülerinnen und Schülern ab.

d) Hier gibt es verschiedene Möglichkeiten des Vorgehens.
Möglicherweise werden die Schülerinnen und Schüler zunächst den Erwartungswert und die Standardabweichung berechnen: $\mu = 10, \sigma \approx 2{,}887$.

e) Mit diesen können sie mit Hilfe der Gauß'schen Sigmaregeln den Annahmebereich für 90% berechnen:
$[10 - 1{,}64 \cdot 2{,}887; 10 + 1{,}64 \cdot 2{,}887] \approx [5{,}27; 14{,}73] \approx [6; 14]$ für 90%
Alternativ könnten sie mit Hilfe der kumulierten Wahrscheinlichkeiten und einer Art „Ausprobieren" auf ähnliche Bereiche kommen.

f) Auch hier sind individuelle Lösungen zu erwarten, da die Schülerinnen und Schüler jeweils ganz unterschiedliche Ergebnisse beim Rollen des Bleistiftes erreicht haben. Es werden Annahmen und Ablehnungen der Hypothese erwartet.
Für den einzelnen Bleistift bedeutet das, dass einige Laplace-Bleistifte sind und einige nicht.

g) Wird der Annahmebereich vergrößert, dann wird die Hypothese (hier: p = 1/6) leichter/häufiger akzeptiert und schwieriger/seltener verworfen.
Wird der Annahmebereich verkleinert, dann wird die Hypothese (hier: p = 1/6) leichter/häufiger verworfen und schwieriger/seltener akzeptiert.

Anmerkung zur Durchführung
Handelt es sich um ähnliche, vergleichbare Bleistifte, so kann man die Ergebnisse des Gesamtexperiments zusammenfassen und es als <u>ein</u> Experiment behandeln. Dann hat man ein Experiment mit (je nach Zahl der Schüler-innen) mehreren hundert Daten. Dafür lassen sich die Berechnungen noch einmal durchführen.

Anmerkung
In der Regel erweisen sich Bleistifte nicht als gute Laplace-Modelle, weil die Mine nicht genau die Mitte trifft. Aber bei vielen gleichartigen Bleistiften „mitteln sich Abweichungen heraus", so dass Experimente in der Summe mehrerer Bleistifte-Versuche sich als gute Laplace-Geräte erweisen. (Info von Wolfgang Riemer)

Literatur
http://www.riemer-koeln.de/mathematik/wuerfelstifte/bleistiftrollen-mit-geogebra.pdf