

Rundbrief 225



3/2024

Lernen im Mathematikunterricht mit, über und trotz Künstlicher Intelligenz



Wer lernt zukünftig, wie?
Bilder erzeugt mit KI

Inhaltsverzeichnis

Editorial	3
Welchen Beitrag kann der MU zum Thema „Kritisches Verstehen von KI“ leisten?	4
KI und Mathematikunterricht – eine subjektive Standortbestimmung	11
KI im Mathematikunterricht nutzen	16
KI-Chatbots und die Mathematik	22
Leitideen Mathematikunterricht im Kontext von KI	31
... die letzte Seite ...	32

Impressum

Der MUED-Rundbrief erscheint ca. vier Mal im Jahr in Münster mit einer Auflage von 800 Exemplaren.

MUED e.V., Windthorststr. 7, 48143 Münster
Tel. 0251 97957799, Fax 0251 97957797
e-mail: mued.ev@mued.de, <http://www.mued.de>

Redaktion dieses Rundbriefs: Gerti Kohlruss, Volker Eisen
Redaktion des nächsten Rundbriefs: Philipp Hamers u. Rainer Vockenroth

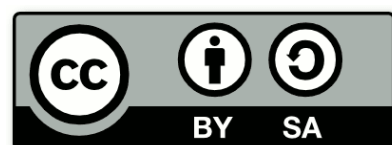
Editorial

„Spätestens seit den Debatten um textgenerative Künstliche Intelligenzen (KI) wie ChatGPT und deren Einfluss auf das Bildungswesen – sowohl hinsichtlich der Bearbeitung von Prüfungsleistungen als auch eines veränderten Lernverhaltens – ist klar, dass KI aus dem Bildungssystem nicht mehr wegzudenken ist (...). Ebenso disruptiv zeigt sich dies in anderen KI-basierten Aspekten von Mathematikunterricht, wie bspw. der App Photomath (<https://photomath.com/de>), welche mathematische Aufgaben scannen, kleinschrittig lösen und teils sogar erklären kann.“¹ So beginnt ein Bericht über die Diskussion zum Thema KI im Mathematikunterricht von der diesjährigen GdM-Tagung. Weiter heißt es dort: „Es zeigten sich ... viele Unklarheiten ..., was jenseits der singulären bzw. exemplarischen Nutzung von KI überhaupt Ziele der Nutzung und Integration von KI in Bildung und Forschung innerhalb der Mathematikdidaktik sein könnten bzw. sollten. Eine größere Vision scheint hier noch zu fehlen.“ (ebenda). Am Ausprobieren, Suchen und Sortieren beteiligt sich auch die MUED auf der Jahrestagung 2024. Mit diesem Rundbrief versuchen wir darauf einzustimmen:

- Rolf Biehler gibt einen sehr neugierig machenden Vorgeschmack auf seinen Vortrag und Workshop auf der Jahrestagung, in dem es um Lernen *über* KI geht.
- Volker Eisen beschreibt einen subjektiven Stand des Nachdenkens über den Wandel durch Künstliche Intelligenz (Lernen *trotz* KI).
- Gerti Kohlruss stellt grundsätzliche Überlegungen an zur Nutzung von KI im Mathematikunterricht vor dem Hintergrund der Visionen der MUED (Lernen *mit* KI).
- KI im MU
- Die „Letzte Seite“ macht zwei Vorschläge zum spielerischen Experimentieren mit KI (Abbildungen mit KI generiert).

Schließlich hatten wir den Eindruck, dass es hilfreich sein könnte, die Vielzahl an (teilweise nur angerissenen) Gedanken als Cluster in eine Übersicht zu bringen (erstellt mit ChatGPT – mit etwas Nachhilfe ...).

Wir wünschen viele Anregungen bei der Lektüre und hoffen dich auf der Tagung zu sehen,
mit herzlichem Gruß,
Gerti und Volker



¹ aus: Daniel Sommerhoff, Tim Lutz & Benjamin Rott (Kiel, Landau, Köln), Künstliche Intelligenz in der Mathematikdidaktik. BzMU24

Welchen Beitrag kann der MU zum Thema „Kritisches Verstehen von KI“ leisten?

Informationen zum Vortrag und Workshop auf der MUED-Tagung am 15.11.2024, Reinhardswaldschule in Fulda bei Kassel

Rolf Biehler, Universität Paderborn
biehler@math.upb.de; <http://go.upb.de/rolfbiehler>

Im Vortrag und im Workshop werden Unterrichtsmaterialien und Konzepte vorgestellt, die wir im ProDaBi-Projekt entwickelt und erprobt haben (www.prodabi.de). Im mathematik lehren Heft 244 (2024) sind einige Beiträge aus dem ProDaBi-Projekt und aus dem CAMMP-Projekt veröffentlicht worden (<https://www.cammp.online>). Auf beiden Websites gibt es auch ausgearbeitete Unterrichtsmaterialien und Konzepte.

In Biehler et al. (2024) gehen wir von folgender Charakterisierung von KI aus:

"Unter künstlicher Intelligenz verstehen wir die Fähigkeit von Maschinen, Aufgaben auszuführen, die normalerweise mit menschlicher Intelligenz in Verbindung gebracht werden. Einem Computerprogramm werden in der Definition menschenähnliche Eigenschaften zugeschrieben, wie diese Fähigkeiten zustande kommen, ist dabei unwichtig. Es kann sich sowohl um regelbasierte Algorithmen handeln (wie beim allerersten Chatbot ELIZA) als auch um Algorithmen, die mit maschinellem Lernen entwickelt wurden (wie bei maschinellen Übersetzungstools oder Gesichtserkennungssoftware). Demgegenüber ist einzuwenden, dass wohl kaum jemand einen Taschenrechner als KI bezeichnen würde, obwohl dieser rechnet – eine Fähigkeit, die Menschen zugeschrieben wird. Beim maschinellen Lernen wird im Gegensatz zu regelbasierten Ansätzen einem Computer zugeschrieben, einen Algorithmus selbst gelernt zu haben. Aus mathematischer Sicht bedeutet dies jedoch fast ausschließlich, dass aus verfügbaren Daten Parameter eines gewählten (Modell-) Ansatzes bestimmt werden. Daten können z. B. aus digitalen Bildern von Hunden oder Katzen bestehen. Ein Mensch hat den Bildern ein Label, Katze bzw. Hund, zugeordnet. Mit diesen Daten lernt die „Maschine“ (der Computer) einen Algorithmus zur Klassifikation von Bildern mit den Kategorien Katze und Hund – ein Mensch muss zuvor allerdings einen Modellansatz wählen. Das Ergebnis einer maschinellen Lernmethode kann also selbst wieder als ein Algorithmus gesehen werden, den die Maschine „gelernt“ hat."

1 | Wissenswert: Kategorien des maschinellen Lernens


Die verschiedenen Methoden des maschinellen Lernens werden in Kategorien zusammengefasst:

- Beim *überwachten Lernen* (*supervised learning*), welches bereits oben diskutiert wurde, liegen zur Entwicklung (zum „Training“) des mathematischen Modells sowohl die *Inputdaten* (Werte der Prädiktorvariablen) als auch die zugehörigen *Outputdaten* (Werte der Zielvariablen) vor. Die in **Kasten 2** beschriebene Regressionsanalyse gehört zu dieser Kategorie. Mehrere Beiträge dieser Ausgabe enthalten Unterrichtsvorschläge zu Methoden des überwachten Lernens (*Entscheidungsbäume*, *Support Vector Machine*, *N-Gramm* und *k-nächste-Nachbarn*).
- Beim *unüberwachten Lernen* (*unsupervised learning*) liegen nur die Eingangsdaten, aber kein zugehöriger Output vor. Man spricht davon, dass die Daten nicht *gelabelt* sind. Methoden des unüberwachten Lernens finden z. B. beim Clustern von Daten Einsatz.
- Methoden des *bestärkenden Lernens* (*reinforcement learning*) verbergen sich z. B. hinter KI-Systemen, die zum Schachspielen entwickelt wurden, stellen aber auch eine wichtige Komponente bei der Entwicklung von ChatGPT dar. Mathematisch sind diese Methoden der *Kontrolltheorie* zuzuordnen. Ein einfaches Beispiel für bestärkendes Lernen liefert der Beitrag **Vom Zufall zur optimalen Strategie**.
- Ein weiterer zentraler Begriff im Kontext von KI ist das *Deep Learning*. Damit ist die Verwendung von *künstlichen neuronalen Netzen* (*KNN*) als maschinelle Lernmethode gemeint. Im Kern ist ein *KNN* eine Verkettung vieler elementarer, nicht linearer und affin-linearer Funktionen, die in realen Anwendungen von Millionen bis Milliarden Parametern abhängen. Auch beim Training von KNNs wird eine Fehlerfunktion definiert und die Parameter des Netzes (also der verketteten Funktionen) durch Lösen eines Optimierungsproblems bestimmt. KNNs werden hier nicht unterrichtspraktisch ausgearbeitet. Die Grundideen maschinellen Lernens lassen sich leichter an Methoden wie *Entscheidungsbäumen* und *k-nächste-Nachbarn* erklären.

Aus: Biehler et al. (2024, S. 3)

Wir haben verschiedene "unplugged" Materialien entwickelt, um die Schüler:innen selbst mit Methoden des maschinellen Lernens (als zentraler Teil moderner KI) vertraut zu machen, einmal mit Datenkarten mit Lebensmitteldaten, um damit manuell Klassifikations-Entscheidungsbäume zu konstruieren und dann auch zu verstehen, welche Vor- und Nachteile es hat, wenn ein Computer die automatische Konstruktion übernimmt. Diese Materialien können auch verwendet werden, um das wichtige Konzept von Trainings- und Testdaten und das Problem von Overfitting und Bias zu erklären. Das Sachthema ist die Vorhersage, ob Lebensmittel eher empfehlenswert sind oder nicht, auf der Grundlage von Nährwertkennzahlen. (Podworny et al., 2024). Eine Druckvorlage für die Datenkarten findet man hier: [go.upb.de/Druckvorlage Lebensmittelkarten](https://go.upb.de/Druckvorlage_Lebensmittelkarten). Die gesamte Unterrichtsreihe (ab Klasse 5 und 6 nutzbar) ist unter go.upb.de/Entscheidungsbaeume-KI5u6 zu finden. Entscheidungsbäume gelten als ein relativ einfaches transparentes Verfahren, an dem man Grundideen des Maschinellen Lernens erklären kann (genauer gesagt das so genannte supervised learning).

Apfel




Nährwerte pro 100g

Energie	52 kcal
Fett	0,2 g
davon gesättigte Fettsäuren	0,0 g
Kohlenhydrate	13,8 g
davon Zucker	11,0 g
Eiweiß	0,3 g
Salz	0,0 g

ProDaBi

Avocado




Nährwerte pro 100g

Energie	160 kcal
Fett	13,0 g
davon gesättigte Fettsäuren	2,8 g
Kohlenhydrate	2,0 g
davon Zucker	0,7 g
Eiweiß	1,5 g
Salz	0,1 g

ProDaBi

Banane




Nährwerte pro 100g

Energie	95 kcal
Fett	0,3 g
davon gesättigte Fettsäuren	0,1 g
Kohlenhydrate	21,0 g
davon Zucker	12,0 g
Eiweiß	1,1 g
Salz	0,1 g

ProDaBi

Bratwurst




Nährwerte pro 100g

Energie	236 kcal
Fett	18,0 g
davon gesättigte Fettsäuren	7,0 g
Kohlenhydrate	1,0 g
davon Zucker	1,0 g
Eiweiß	18,0 g
Salz	2,0 g

ProDaBi

Brokkoli




Nährwerte pro 100g

Energie	43 kcal
Fett	0,2 g
davon gesättigte Fettsäuren	0,0 g
Kohlenhydrate	2,9 g
davon Zucker	1,7 g
Eiweiß	4,0 g
Salz	0,0 g

ProDaBi

Butter



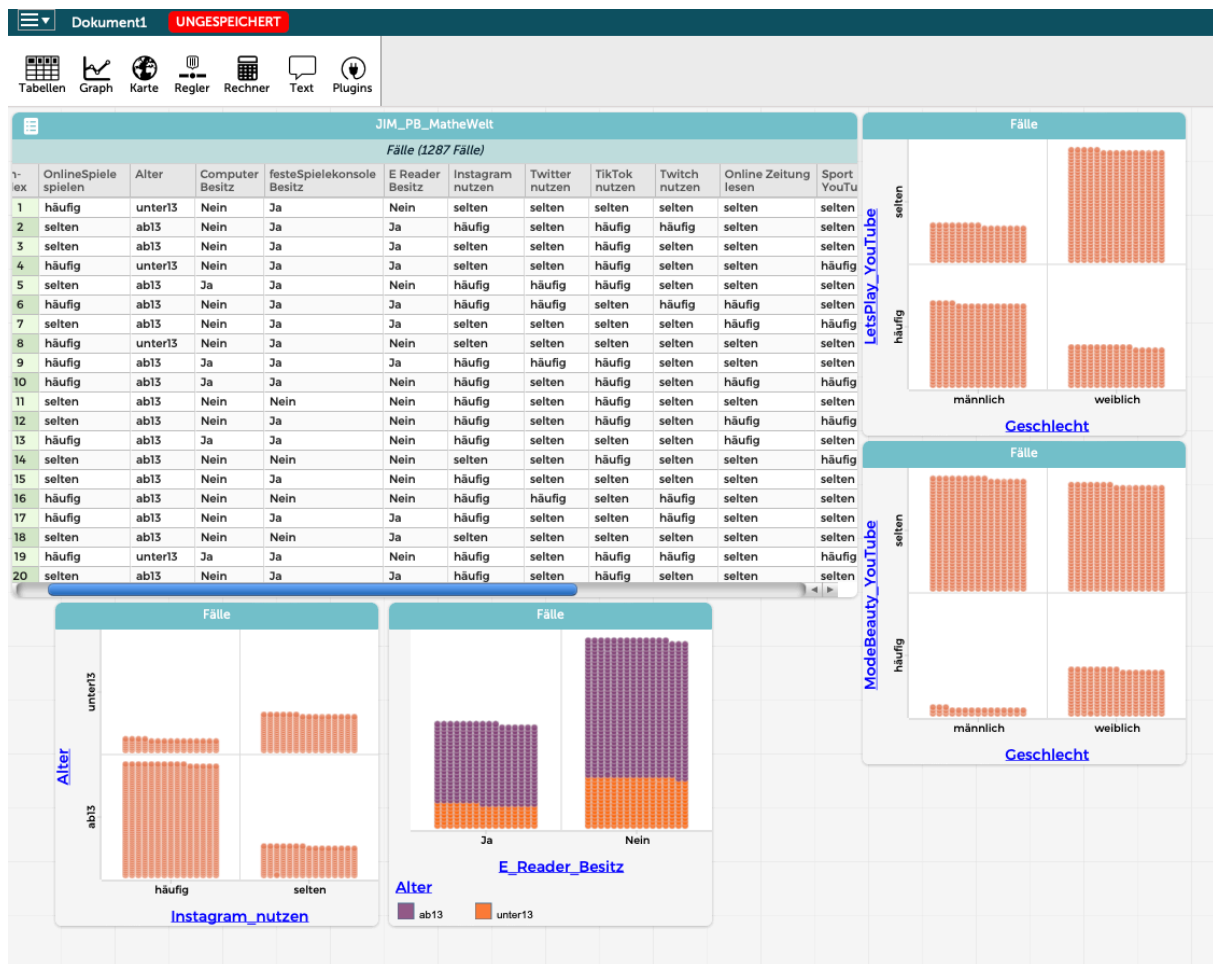
Nährwerte pro 100g

Energie	743 kcal
Fett	82,0 g
davon gesättigte Fettsäuren	55,0 g
Kohlenhydrate	0,7 g
davon Zucker	0,7 g
Eiweiß	0,6 g
Salz	0,0 g

ProDaBi

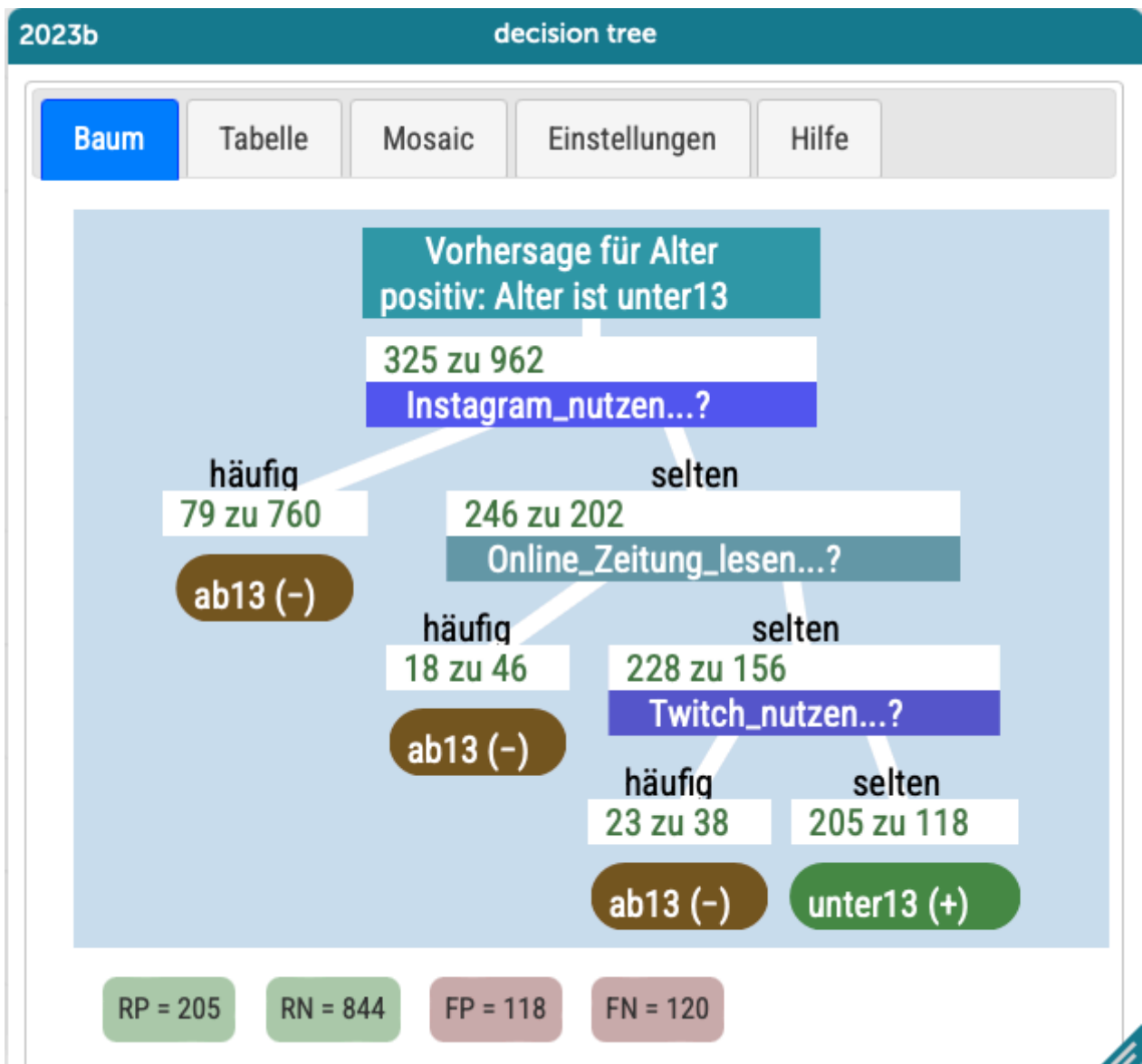
ProDaBi-Datenkarten

Daten spielen beim maschinellen Lernen eine zentrale Rolle, daher sind Kenntnisse in der Datenanalyse eine wesentliche Voraussetzung für das Verständnis dieses neuen Themas. Hier könnte der Mathematikunterricht noch viel mehr tun als bisher. Wir nutzen CODAP (codap.concord.org) als kostenloses webbasiertes Drag-and-Drop Datenexplorationstool, für das wir auch eine deutsche Oberfläche entwickelt haben. In Kürze werden einige interessante Datensätze, Einführungsvideos und Einführungstexte auf unserer Website verfügbar sein. In CODAP zur Datenanalyse führt auch das Buch von Biehler and Frischemeier (2024) ein, das auch für die Sekundarstufe I geeignet ist.



Screenshot von CODAP: <http://tinyurl.com/MatheWeltDaten>

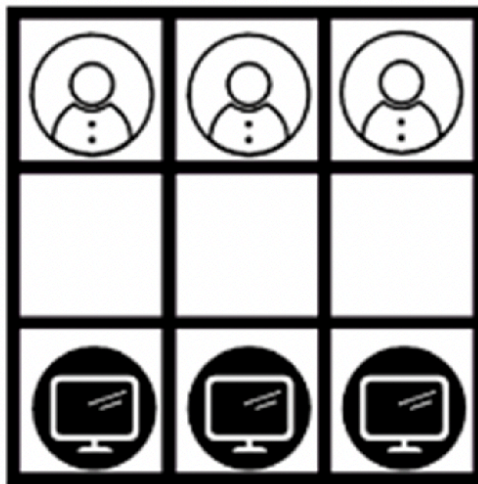
CODAP beinhaltet ein besonderes Plug-In für die halbautomatische Erstellung von Entscheidungsbäumen, das ARBOR Plug-In (Erickson & Engel, 2024). Wir nutzen das Plug-In auch am Ende in der MatheWelt von mathe-matik lehren 244, in der wir aber lange mit Vierfeldertafeln arbeiten, anhand derer die Lernenden immer besser werdende Entscheidungsbäume konstruieren können (Fleischer et al., 2024). Thema dabei ist das Vorhersagen des Alters einer Person aus Mediennutzungsdaten. Wir verwenden dabei einen Datensatz ähnlich den JIM-Daten (Feierabend et al., 2022), den wir selber bei über 1000 Schüler:innen mit über 50 Variablen erhoben haben, so dass den Lernenden Mikrodaten zur Analyse zur Verfügung stehen. (Frischmeier et al., 2021; Podworny, 2024). Die gesamte Unterrichtseinheit zur Einführung von Entscheidungsbäumen in Klasse 9 und 10 ist demnächst auf der ProDaBi - Website verfügbar. Einen Einblick liefern bereits Biehler and Fleischer (2021).



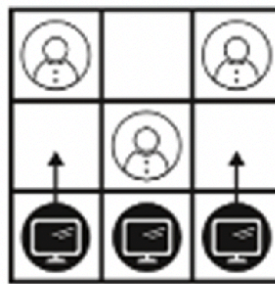
Baum zur Vorhersage des Alters aus Mediennutzungsdaten.

<https://tinyurl.com/BaumAlterKlein>

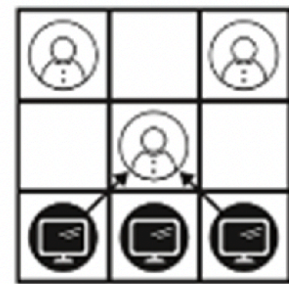
Ein anderes Konzept des Maschinellen Lernens ist das verstärkende Lernen (reinforcement learning). Dazu haben wir auch unplugged Material am Beispiel des Bauernschachs entwickelt (Druckvorlage unter www.pro-dabi.de/mensch-maschine-spiel/), ursprünglich für den Informatikunterricht. Wir haben nun Möglichkeiten vorgeschlagen, dieses Material auch gewinnbringend im Mathematikunterricht einzusetzen (Biehler & Fleischer, 2024).



Zulässige Züge



Geradeaus ziehen



Schräg schlagen

Bauernschach: Zulässige Züge

Runde 1 A

Runde 2 B

Runde 3 C

MENSCH

MASCHINE

Runde

1

2

3

Zug

Zug

Zug

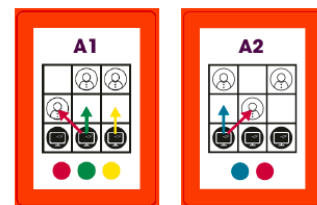
blau

grün

gelb

rot

Situationskarten mit Zugoptionen



Farbkarten



Spielplan Mensch-Maschine

Im Workshop kann mit dem Unplugged-Material gearbeitet werden. Ferner sollte ein digitales Endgerät (Tablet oder Laptop) für die Nutzung von CODAP mitgebracht werden.

Literatur

(englischsprachige Artikel sind leicht mit DeepL oder ChatGPT ins Deutsche zu übersetzen. Pdfs der Literatur können bei Rolf Biehler zum nur persönlichen Gebrauch angefordert werden.)

Biehler, R., & Fleischer, Y. (2021). Introducing students to machine learning with decision trees using CODAP and Jupyter Notebooks. *Teaching Statistics*, 43(S1), S133-S142. <https://doi.org/10.1111/test.12279>

Biehler, R., & Fleischer, Y. (2024). Vom Zufall zur optimalen Strategie: Bestärkendes maschinelles Lernen am Beispiel Bauernschach. *Mathematik lehren*, 2024(244), 19-23.

Biehler, R., & Frischemeier, D. (2024). *Daten-Spürnasen auf Spurensuche: Datenanalyse in der Grundschule mit digitalen Werkzeugen*. Klett Kallmeyer.

Biehler, R., Schönbrodt, S., & Frank, M. (2024). KI als Thema für den Mathematikunterricht. *Mathematik lehren*, 2024(244), 2-7.

Erickson, T., & Engel, J. (2024). Was kommt vor CART? Einführung von Klassifikationsbäumen mit Arbor und CODAP. *Stochastik in der Schule*, 44(2), 20-30.

Feierabend, S., Rathgeb, T., Kheredmand, H., & Glöckler, S. (2022). *JIM-Studie 2022 - Jugend, Information, Medien. Basisstudie zum Medienumgang 12- bis 19-jähriger in Deutschland*. Medienpädagogischer Forschungsverbund Südwest. https://www.mpfs.de/fileadmin/files/Studien/JIM/2022/JIM_2022_Web_final.pdf

Fleischer, Y., Podworny, S., & Biehler, R. (2024). Datenbasiertes Entscheiden - Wie TikTok dein wahres Alter herausfinden kann. *mathematilk lehren. MatheWelt* (244).

Frischemeier, D., Biehler, R., Podworny, S., & Budde, L. (2021). A first introduction to data science education in secondary schools: Teaching and learning about data exploration with CODAP using survey data. *Teaching Statistics*, 43(S1), S182-S189. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/test.12283>

Podworny, S. (2024). Eine qualitative Studie zu Data Science Education: Schülerinnen und Schüler analysieren multivariate Daten. *Stochastik in der Schule*, 44(1), 2-10.

Podworny, S., Fleischer, Y., & Biehler, R. (2024). Lebensmittel mit Entscheidungsbäumen klassifizieren: Grundideen des maschinellen Lernens vermitteln. *Mathematik lehren*, 2024(244), 8-13.

KI und Mathematikunterricht – eine subjektive Standortbestimmung

Volker Eisen

Im November 2022 wurde ChatGPT veröffentlicht. Zu der Zeit habe ich ein Sabbat-Halbjahr genossen und alle (schulischen) News waren weit weg – ich habe von Nichts was mitbekommen (und das war gut so). Als ich dann im Februar wieder ran musste, war plötzlich allen Orts die Rede von einem bahnbrechend neuen System, welches auf bislang nie dagewesene Weise die (Bildungs-)Welt verändert hat. Offenbar hatte ich die Disruption des Jahrtausends einfach so verpasst!? Da alle bestens Bescheid zu wissen schienen, traute ich mich nicht nachzufragen, wovon denn da gesprochen wird (damit hätte ich ja zugegeben, jeden Trend völlig zu verschlafen). Nach etwas mühsamer Recherche sah ich etwas klarer (wenn man immer nur „schädschipidi“ oder so genuschelt hört, ist es gar nicht so einfach ... da ich alle Trends verschlafe, war ich zu blöd, einfach „hey Siri“ zu benutzen, naja ...). Ok, es gibt also einen neuen, „frei“ nutzbaren Textgenerator, der verblüffend gut zu sein scheint. Im Vergleich zu den bisher gebauten Systemen, wird ChatGPT nach meiner Wahrnehmung sehr viel offensiver mit dem Begriff „Künstliche Intelligenz“ in Verbindung gebracht. Damals fand ich es schon erstaunlich, dass es genügt einen kleinen Schritt aus der „Pädagogikblase“ rauszutreten, um die Disruption des Jahrtausends zu verpassen. In Ghana, wo ich exakt im November 2022 war, hat sich schon gar niemand dafür interessiert.

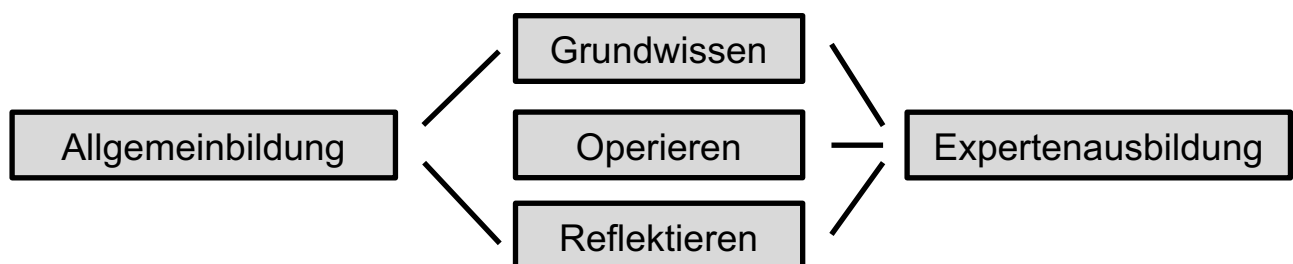
Anfang 2023 habe ich dann für mich entschieden, die erste Woge von Ratgebern und Unterrichtsvorschlägen an mir vorbei ziehen zu lassen, bis sich der Erfahrungsstand konsolidiert und fundierte Einordnungen absehbar sind. Grundlegendes zum konkreten Umgang in der Schule wurde erstaunlich schnell und (wie ich finde) fundiert geklärt (Datenschutz, Prüfungssicherheit, Wissenschaftlichkeit).

Und jetzt, fast zwei Jahre später, habe ich mich überreden lassen, den Tagungsrundbrief zum Thema KI mit herauszugeben. Eigentlich bin ich immer noch im Abwarten-Modus. Eigentlich habe ich keine Ahnung von ChatGPT etc, KI, NLP, neuronalen Netzen, ... und soll mir anmaßen, etwas Sinnvolles dazu zu schreiben (aber das habe ich mit den LLM, large language models, gemeint: ChatGPT & co haben auch keine Ahnung von dem, worüber sie Texte produzieren). Eigentlich habe ich nach wie vor keine aktive Erfahrung mit der Nutzung von LLM. Ich kann einzig anbieten, meine Wahrnehmungen,

Gedanken und Fragen als Ahnungsloser zur Diskussion zu stellen. (Zum Glück ist Gerti umso kompetenter und hat den Löwenanteil geleistet – vielen Dank dafür!!!).

Grundsätzlich folge ich der Stimmung des großen Wandels: *KI-Systeme werden den Mathematikunterricht grundlegend verändern, und zwar mit einer prinzipiell anderen Qualität als das CAS getan haben und tun* (= Grundthese). Vielleicht nicht die aktuellen Systeme, aber sicher in naher (?) Zukunft. Zentral scheint mir dabei die Frage, welche und wie viel Mathematik Menschen dann überhaupt noch lernen müssen? Oder auch so formuliert: Wie viel Lernzeit können wir noch auf Mathematik „verschwenden“? Nicht zuletzt auch mit dem Aufkommen von Systemen wie ChatGPT wächst nämlich der Lernbedarf an andere Stelle rasant an und Lernzeit ist nun mal endlich. Bislang konnten „wir“ Mathelehrkräfte immer ziemlich sicher sein, was die Bedeutung unseres Faches angeht. Aber die Relativierung ist in Sicht. Im future of jobs survey 2023 des world economic forum wurden 3000 Unternehmen weltweit dazu befragt, welche Skills zukünftig bei Bewerbern gefordert werden: „Lesen, Schreiben, Mathematik“ liegt dabei auf Platz 23 von 26 direkt hinter Mehrsprachigkeit.²

Um obige These differenzierter zu beleuchten, folge ich dem Konzept zur mathematischen Bildung des österreichischen Didaktikers Roland Fischer, welches ich bislang nach wie vor für hilfreich halte:



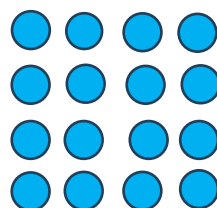
Der Fokus liegt hier auf der mathematischen Allgemeinbildung als Hauptauftrag des Mathematikunterrichts mit dem Ziel der „Kommunikationsfähigkeit mit Experten“³. Das Modell von Fischer verortet die Bedeutung des

² Aus der Keynote “New Work – Careers of the Future – Future Skills” von Michael Vollmann (Amazon) auf der MINT-Jahreskonferenz 2024 in Potsdam, <https://vimeo.com/925330057> (18‘30-19‘45)

³ FISCHER Roland (2001), Höhere Allgemeinbildung; in: FISCHER Anton u. a. (Hrsg.), Situation und Ursprung von Bildung, Franz-Fischer-Jahrbuch 2001, Universitätsverlag: Leipzig, 151–161

Operierens sehr klar im Dienst der Kompetenzbereiche Grundwissen (Konzepte, Begriffe, Darstellungsformen verstehen) und Reflektieren (was ist die Bedeutung der Begriffe und Methoden, was leisten sie, wo sind ihre Grenzen): In der Schule braucht es nur so viel „Rechnen können“, wie zur Ausbildung von Grundwissen und als Grundlage für Reflektion notwendig ist. Das passt gut zum didaktischen Prinzip „Inhalt vor Kalkül“. Meines Erachtens liegt auf der Hand, dass die nach wie vor sehr prominente Kalkülorientierung in den Bildungsstandards rückständig ist (siehe z.B. den 2019 neu eingeführten Kompetenzbereich „Operieren“ im KLP NRW mit dem für mich nur schwer mit Sachverstand in Verbindung zu bringenden Satz „Ein verständiger Umgang mit Medien und Werkzeugen setzt sicheres hilfsmittelfreies Operieren voraus.“). Die Widersprüche zu Taschenrechner, GTR und CAS sind schon unaufgelöst. KI-Systeme mit integrierten Mathematiksystemen erleichtern das „Outsourcen“ auch sehr komplexer Kalküle und übernehmen zunehmend auch das Problemlösen und Forschen – ein verständiger Umgang mit Werkzeugen wird zukünftig hilfsmittelfreies Operieren *ersetzen*.

Aber braucht man nicht auf jeden Fall Grundwissen? Bislang wäre meine Antwort ein klares „Ja“! Allerdings kommt hier ins Spiel, was ich oben als prinzipiell andere Qualität postuliert habe. Als exemplarische Verdeutlichung eine Episode, die ich mit einem Straßenhändler in Ghana erlebt habe: Offenbar ungewöhnlich wünschte ich ein ganzes Gebinde aus 4 mal 4 Wasserflaschen zu kaufen. Um den Preis zu ermitteln, zählte der Händler die Flaschen, kam auf 15 und berechnete dann den (folgerichtigen) Preis mit dem Taschenrechner seines Handy.



Dort heißt es weiter: „Der mündige Bürger ist sehr oft in der Rolle eines solchen Richters. In vielen Fragen des öffentlichen aber auch des privaten Lebens wird er mit Expertenaussagen konfrontiert und muß sich ein Urteil bilden, um (mit)entscheiden zu können. Es müssen nicht so große Fragen wie die Sicherheit von Atomkraftwerken oder die wünschenswerte Entwicklung der Gentechnologie sein; schon bei den Fragen gesunder Lebensgestaltung, Hausbau oder Jobsuche stellen sich Fragen, zu denen zwar aus jeweils spezifischer Perspektive Expertenmeinungen vorliegen, die einem aber die eigene Positionierung nicht ersparen. Man wird sich in der Regel darauf verlassen, daß die fachliche Richtigkeit der Expertise gegeben ist, daß sie auf dem letzten Stand ist und daß diesbezüglich eine gegenseitige Kontrolle der Experten einer Disziplin funktioniert. In der Frage der Wichtigkeit, d. h. für wie bedeutsam man ein bestimmtes Expertenurteil hält, wie man es gewichtet, da ist man auf das eigene Urteil angewiesen. Letzten Endes muß man über Experten urteilen, obwohl man weniger als sie selbst versteht.“

Der Kalkül war hier also nicht das Problem (dafür wurde erfolgreich der Taschenrechner eingesetzt), sondern vermutlich fehlte dem Mann das multiplikative Verständnis, um sofort zu sehen, dass 4 Reihen je 4 Flaschen eben 16 sind und nicht 15 und noch tiefergehend ein Zahlverständnis als Menge überhaupt. Nebenbei: Wenn der IQB-Bildungstrend 2021 gut einem Fünftel aller Kinder in Klasse 4 das Verfehlen der Mindeststandards nachweist, dann geht es genau um das - 21,8% der Kinder in Deutschland könnten das auch nicht! Also: Sollten wir hier mehr in sicheres Grundwissen investieren? In der Mathematikdidaktik wissen wir, dass diese Probleme (häufig als „Dyskalkulie“ bezeichnet, besser wäre Rechenschwäche), durch eine intensive, langwierige individuelle Förderung aufgefangen werden können. Besser noch werden sie durch einen entsprechenden Unterricht von vorneherein möglichst vermieden. Es geht doch um unbestreitbar wichtige Alltagsfähigkeiten. Doch wie wäre es mit einer App, die die Kamera zur Erfassung der Realsituation nutzt und dann das Ergebnis ohne weiteres Zutun ausgibt? Das geht bestimmt jetzt schon. Und sogar ChatGPT soll mittlerweile schon recht gut im Lösen von Textaufgaben sein, einschließlich der Übersetzung ins mathematische Modell – DAS Argument für Grundwissen – bislang ...

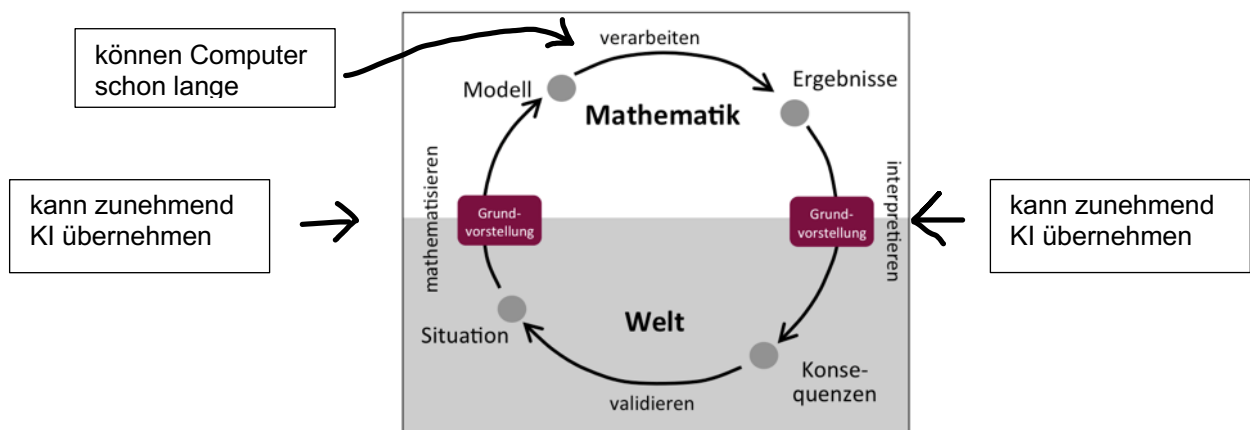


Abb.: Susanne Prediger, Ergänzungen Volker Eisen

Wird das Verstehen von Konzepten unwichtig(er)?

Sollen wir Lernzeit in mathematisches Grundwissen investieren, oder in den geschickten Umgang mit KI-gestützten Mathematiktools, oder haben wir Zeit für beides, oder ... ?

Das Reflektieren kann aber nun wirklich nicht automatisiert werden, oder?! Andererseits: Verlassen wir uns nicht jetzt schon bei der Reflektion (oder: Entscheidungsfindung) sehr oft auf Maschinen: Welchen Film schaue ich als nächstes? Welche Therapie ist für mich am besten? Welche Straftat begehe ich als nächstes (wobei die Entscheidung dann andere für mich auswerten)? ... Man möchte im Sinne von Fischer einwenden: Um mir eigene Urteil bilden zu können, um (mit)entscheiden zu können brauche ich auch mathematische Allgemeinbildung. Z.B. kann jemand ohne mathematisches Verständnis nicht alarmiert sein, wenn die AFD 25% aller Stimmen erhält, weil sich diese Person gar nicht vorstellen kann, wie wenig oder viel 25% sind. Der*die persönliche KI-Assistent*in kann jedoch in Klartext darauf hinweisen, ob mich das freuen soll oder ob ich besorgt sein sollte! Da brauche ich gar keine Mathematik (mehr). Und weil mich die KI so gut „kennt“ kann sie das für mich passende Urteil über Experten treffen, auch wenn ich gar nichts verstehe (siehe Fußnote 2).

Wird mathematische Reflexionskompetenz unwichtig(er)?

In Variation des oben zitierten Satzes aus dem Kerncurriculum NRW könnte die Frage lauten: „Eine verständige Entscheidungsfindung bei Fragen, die (auch) mathematische Reflexion erfordern, setzt sichere mathematische Kenntnisse voraus“? Sollen wir Lernzeit investieren in das Reflektieren über die Bedeutung mathematischer Begriffe und Methoden, was sie leisten und wo sind Grenzen, oder in den geschickten Umgang mit KI-gestützten Mathematiktools, oder in das Verstehen der Funktionsweise der KI-Systeme, oder haben wir Zeit für alles, oder ... ?

Die Beispiele sollen und können nicht *belegen*, dass Mathematikunterricht überflüssig wird. Das entspricht – glaube ich ;-)- auch nicht meiner Meinung. Aber vielleicht machen sie Unvermeidlichkeit und Tragweite des Wandels plausibel. Das wirft viele Fragen auf. Nach meiner Einschätzung wird die zentrale Frage, welche mathematischen Fähigkeiten jeder Mensch haben sollte, nicht die Mathematikdidaktik beantworten. Dies ist *langfristig* gesehen ein Teil des gesellschaftlichen Aushandelns über das, was Menschsein im Zeitalter von KI ausmachen wird⁴. Um so mehr kommt es

⁴ Siehe dazu die m.E. sehr lesenswerte Stellungnahme des Deutschen Ethikrates „Mensch und Maschine – Herausforderungen durch Künstliche Intelligenz“ (<https://www.ethikrat.org/publikationen/stellungnahmen/mensch-und-maschine/>). Aus der Kurzfassung (S. 62f): „128) Im vierten Querschnittsthema geht es um die

mittelfristig darauf an, sich den Fragen offensiv zu stellen und offen zu diskutieren (Spezialcomputer für Abi-Prüfungen markieren dabei m.E. keinen zukunftsweisenden Weg – ebenso wenig das Mantra Digitalisierung in der Schule ist wichtig, weil sie wichtig ist). Dazu gehört sicher auch die aktuelle Diskussion um Mindeststandards für den Mathematikunterricht. Ich persönlich kann mich jedenfalls entscheiden, die These des grundlegenden Wandels durch KI optimistisch zu nehmen und aktiv (mit) zu gestalten als Chance zum Wandel der Unterrichtskultur (und Schulkultur). Und somit öffnet sich schließlich bereits *kurzfristig* für die Praxis ein Raum, in dem ich mutig (oder auch waghalsig?) ausprobieren und im Kleinen anfangen kann, meinen Unterricht weiterzuentwickeln.

Für alle drei Perspektiven (lang,- mittel- und kurzfristig) erhoffe ich mir auf der Jahrestagung Anregungen und Austausch.

KI im Mathematikunterricht nutzen

Gerti Kohlruss

Zielsetzung

Der Einsatz von Künstlicher Intelligenz im Mathematikunterricht ist keine Frage des Ob, sondern des Wie. Zumindest wenn man den aktuellen Papieren der [KMK](#) und ihrer [Ständigen Wissenschaftlichen Kommission](#) (SWK) bzw. den KI-Handreichungen der Bundesländer folgt. Im SWK-Papier wird unter anderem ein regelmäßiger Einsatz ab Klasse 8 empfohlen. Natürlich unter mehrperspektivischer Betrachtung von ethischen, sozialen, didaktischen und rechtlichen Erwägungen.

Auswirkungen von KI auf menschliche Kompetenzen und Fertigkeiten. Deren Erwerb und Erhalt kann durch die Delegation menschlicher Tätigkeiten an Maschinen gefährdet werden. Weil die Nutzung von KI-Anwendungen (wie auch bei anderen Technologien) dazu führen kann, dass menschliche Fähigkeiten nachlassen bzw. ganz verkümmern, können Abhängigkeiten von diesen Technologien entstehen. Handelt es sich dabei um gesellschaftlich besonders bedeutsame oder kritische Einsatzbereiche, ist ein Verlust von menschlichen Kompetenzen und Fertigkeiten ein ernstzunehmendes Risiko.“

Es ist bei weitem nicht das erste Mal, dass sich Mathematiklehrer:innen mit dem Einsatz von Tools auseinandersetzen. Schon an dem mittlerweile ganz selbstverständlich genutzten Hilfsmittel "Taschenrechner" oder auch MMS-Systemen wird deutlich, wieviel Arbeit, Reibung, didaktische Überlegungen und Strategien es gebraucht hat (und vielleicht auch noch braucht), bis wir eine Sicherheit für einen sinnvollen Einsatz gewonnen haben.

So weist beispielsweise Susan Midlarsky in ihrem Buch "Art of learning math" darauf hin, dass ein Taschenrechner ein Tool ist, das gut oder weniger gut genutzt wird. Sie vertritt weiter, dass während bei anspruchsvollen Rechnungen der Taschenrechner oft hilfreich ist, damit das eigentliche Ziel erreicht werden kann, die Lernenden motiviert werden sollten, einfache Rechnungen und Überschlüsse als stetige Praxis ohne Hilfsmittel durchzuführen (sofern keine speziellen individuellen Voraussetzungen wie beispielsweise Rechenschwäche den Taschenrechnereinsatz auch hier sinnvoll machen).

Nun bahnt sich eine weitere Technik den Weg in die Schule.

Während der Taschenrechner primär als Hilfsmittel für komplexe Berechnungen dienen, MMS-Systeme zusätzlich insbesondere Darstellungswechsel und operatives Arbeiten fördern, eröffnet uns die KI sehr weitreichende und neue Möglichkeiten der Interaktion (z.B. Verständigung mittels Umgangssprache, und zumindest in vielen Bezahltools auch über Audio und Bilder) – und auch Herausforderungen (biasgefärbte Aussagen, halluzinierte Antworten, Vorwegnahme möglicher eigener Denkleistungen, ...). Besonders KI-Chatbots, die über verschiedene Plattformen einfach zugänglich sind, werfen die Frage auf, wie sie das mathematische Lernen unterstützen können, ohne das eigenständige Denken zu verdrängen. Dabei stellt sich auch die Frage, wie sich die Rollen von Lehrkräften und KI sinnvoll ergänzen könnten, um das Mathematik-Lernen und das Verstehen mathematischer Konzepte zu fördern.

Um hierüber nachzudenken, sollen uns im Folgenden drei Fragen leiten:

1. Worum geht es uns eigentlich im Mathematikunterricht, was ist unsere Vision?
2. Welche Aufgaben könnte ein KI-Chatbot bei der Umsetzung eines im Sinne der Vision gedachten Mathematikunterrichts übernehmen, und welche Aufgaben bleiben der Lehrperson vorbehalten?"
3. Wie können KI-Chatbots im Unterricht (und darüber hinaus) sinnvoll genutzt werden, ohne die wichtigen Grundfertigkeiten sowie das ‚Selbsttun und Nachdenken‘ zu gefährden?

Eine mögliche Arbeitsteilung von Lehrer:innen und KI im Mathematikunterricht

Im ersten Abschnitt haben wir bereits angedeutet, dass KI vielversprechende neue Interaktionsmöglichkeiten und Ansätze bietet, und je nach Einsatzweise gut und auch schlecht für das Lernen von Mathematik sein könnte. Für die Diskussion, wie KI im Lernprozess unterstützen könnte, klären wir zunächst, welche Art von Lernprozess im Mathematikunterricht wir hier vor Augen haben.

Wir schauen hier auf Lernprozesse mit der MUEDschen Brille, die die Vision von einem Mathematikunterricht fokussiert, der Lernende befähigt „Gesellschaft und Umwelt verstehen und sinnvoll mitgestalten zu können“ und „selbstbestimmt Handeln zu können“ (s. <https://www.mued.de/ueber-uns> Abschnitt Unterrichtskultur).

Hierbei sind uns die im Fortbildungsprogramm QuaMath fokussierten fachdidaktischen Prinzipien Verstehensorientierung, Durchgängigkeit, Kognitive Aktivierung, Lernenden-Orientierung und Adaptivität sowie Kommunikationsförderung (weitere Erläuterungen s. frei [zugängliche Ausgabe](#) 243 der Zeitschrift Mathematik Lehren) wichtig, doch geht es darüber hinaus um ganzheitliche Bildung und Demokratieerziehung, die lebenslanges Lernen anlegen möchte und gesellschaftliche Verantwortungsübernahme vorbereitet. Hierzu beabsichtigen wir im Mathematikunterricht kreatives Tun sowie kritisches Denken, das eigene und kollaborative Gewinnen von Erkenntnissen, sowie das gemeinschaftliche Vergleichen, Einordnen und Diskutieren anhand relevanter und authentischer Problemstellungen zu fördern.

Keuler schreibt hierzu: „Fachunterricht ist der zentrale Erfahrungsraum im Sozialisationsumfeld Schule. Er prägt schon allein aufgrund seines hohen zeitlichen Anteils im Tagesverlauf und der grundlegenden Funktion von Schule Handeln und Wahrnehmung von Lehrpersonen und Lernenden. Umso wichtiger ist es, ihn in die Gestaltung einer demokratischen Schulkultur einzubeziehen.“ (Keuler 2019, S. 5, zitiert in (Poitzmann/Sobel 2024), S. 38).

Dieses Zitat unterstützt die wichtige Aufgabe der Persönlichkeitsentwicklung und der Demokratiebildung auch in den Fachunterrichten abzubilden. Hierbei tragen die Thematisierung relevanter Lernsituationen sowie eine partizipative Unterrichtskultur dazu bei.

Wir haben hier so weit ausgeholt, weil wir für die Beurteilung der KI-Nutzung nun eine klare Orientierung haben: KI sollte so eingesetzt werden, dass es für einen handlungsorientierten Mathematikunterricht im Sinne des vergangenen Abschnitts zuträglich (und nicht abträglich) ist.

Momentan halten wir einige Tendenzen für problematisch für unsere Vorstellung vom Mathematikunterricht. Beispielsweise scheinen KI-Tools häufiger genutzt zu werden, um Arbeitsblätter mit kleinen geschlossenen Übungsaufgaben zu erstellen (Aufgabenpäckchen). Oder es gibt trainierte KI-Assistenztools, die Lernende unterstützen sollen Routinen aufzubauen. Das kann in einer Übungsphase hilfreich sein, ermöglicht aber weniger eigene Lernwege zu gehen und als Lernende das Lernen selbst zu lenken. Auf der einen Seite halten wir es für hilfreich, wenn eingesetzte Assistenzsysteme die Rolle "einer zurückhaltenden Lernbegleitung" einnehmen könnten, und somit die Lücke zwischen Überforderung und machbarer Herausforderung individuell schließen helfen. Andererseits geht eine kontrollierende Intervention, wie sie sich z. B. Salman Khan, der Gründer der Khan-Akademie, erhofft, in der Form "Du scheinst gerade unaufmerksam. Komm lass uns weiterlernen" im Allgemeinen in die verkehrte Richtung, da es eher eigene Verantwortungsübernahme verlernt, als diese zu stärken (auch wenn es vielleicht im Einzelfall eine sinnvolle Intervention bei entsprechender Diagnose sein könnte). Hierauf sind wir durch Michael Resnicks aktuellen Artikel (Resnick, 2024) aufmerksam geworden, der hierzu schreibt: "Die Realität der heutigen Welt erfordert jedoch einen anderen Ansatz: Den Schüler:innen müssen Möglichkeiten geboten werden, ihre eigenen Ziele zu setzen, auf ihren eigenen Interessen aufzubauen, ihre eigenen Ideen auszudrücken, ihre eigenen Strategien zu entwickeln und das Gefühl zu haben, dass sie die Kontrolle über ihr eigenes Lernen haben." Hieraus lässt sich ableiten, dass die Lernsteuerung nun gerade nicht von der Lehrperson auf den KI-Chatbot übergehen sollte, sondern dass die Lernenden (zunehmend) ihr Lernen selbst steuern.

Wir wissen von Hattie, dass die Lehrperson zentral für den Lernerfolg ist. Dies sollte uns ermahnen, die Rolle von KI nicht zu überschätzen und die Rolle einer Lehrperson zu unterschätzen. Wir dürfen uns bewusst machen, dass Menschen und Maschinen bei unterschiedlichen Aufgaben unterschiedlich performen. Michael Resnick schreibt hierzu: "Eine gute Lehrperson baut eine Beziehung zu den Schüler:innen auf, versteht ihre Beweggründe, kann sich in ihre Bedürfnisse einfühlen, nimmt Bezug auf die Erfahrungen der Schüler:innen und hilft ihnen, miteinander in Kontakt zu treten." Lernen im Klassenzimmer ist ein sehr komplexer Prozess und eben mehr als Informationen zu liefern und Anweisungen zu geben. Lehrpersonen sind grundsätzlich verschieden von Maschinen und nicht austauschbar.

Für den Mathematikunterricht heißt dies, dass wir die Rolle der KI klären und gemeinsam mit den Lernenden erörtern müssen. Es geht darum, KI geeignet

zu nutzen wo es angebracht ist und darauf achten, dass die Mensch-Maschinen-Interaktion, die wichtig zu erlernen ist, nicht zu Lasten der Kommunikation und Kollaboration der Lernenden untereinander geht. Auch während der Corona-Pandemie hat sich gezeigt, wie wichtig Empathie, Austausch und Gemeinschaft für das Lernen im Unterricht sind (sowohl online als auch in Präsenz).

Und nun zu Frage 3: Was heißt dann KI geeignet nutzen? Im Grunde heißt es, die Lernenden in die Lage zu versetzen KI-Tools für ihre Lernzwecke verantwortlich selbst zu nutzen, um beispielsweise bei der Ideengeneration, für Rückmeldungen, für Selbstüberprüfungen, für benötigte Erklärungen oder Veranschaulichungen zu nutzen, ebenso die Ergebnisse der KI kritisch zu hinterfragen und damit auch die Kompetenz mathematisch zu argumentieren zu erweitern.

Und als Nebeneffekt verspricht Michael Resnick, lernen die Lernenden auch viel über die Funktionsweise von KI, in dem sie diese kritisch nutzen. Mit der Überraschung oft falscher oder zu kurz greifender Argumentationen der KI, hinterfragen die Lernenden mehr, wie es dazu kommt. Dadurch wird ein tieferes Verständnis dieser Technologie aufgebaut. Mit Hilfe von Reflexionen können die Lernenden ihre eigenen Lernfortschritte verfolgen und die Art und Weise der KI-Nutzung lernförderlich anpassen. Die Reflexion und kritische Bewertung sind wichtige Hebel, um viele Gefahren ungeeigneter KI-Nutzung von Seiten der Lernenden einzudämmen. Gleichzeitig wird ein tieferes Verständnis der Technologie sowie die Entwicklung von Reflexionskompetenz und Eigenverantwortung gefördert, was wesentlich ist für lebenslanges Lernen und das Entwickeln von Bewältigungsstrategien für komplexe Situationen. Im Gegenzug fordert die Beurteilung der Aussagen eines Chatbots fundierte mathematische Grundlagen. Wir Lehrpersonen werden hier weiter um die Einsicht ringen müssen, dass Lernen auch anstrengend sein darf und selbst mathematisch denken können in Zeiten von zunehmenden Fakenews und halbgaren "low content" wichtiger ist denn je.

Fazit

Insgesamt sind wir der Meinung, dass zur Bearbeitung authentischer und komplexer Probleme der Mathematikunterricht mit KI-Tools offener gestaltet werden kann. Die Lernenden haben nun neben Recherchemöglichkeiten und MMS-Systemen eine Möglichkeit, sich von einem KI-Chatbot adaptiv unterstützen zu lassen. Z. B. kann man Lösungsideen mit Hilfe der KI ergänzen, kann sich Feedback zum eigenen Lösungsplan geben lassen. Auch

sich ein mathematisches Konzept noch einmal oder neu erklären zu lassen ist möglich. Der Vorteil liegt gegenüber vorgefertigten Hilfen darin, dass auch andere Lernwege beschrrieben werden können und auf Anforderung trotzdem unterstützt werden können. Diese co-konstruktive Erarbeitung gilt es stetig zu reflektieren und zu evaluieren, inwieweit sich die eigenen Kompetenzen weiterentwickeln. Wir vermuten, dass kollaborative Erarbeitungen in Gruppen, grundsätzlich mehr zu Abwägungen, Diskussionen und kritischen Hinterfragen führen, als wenn Lernende in Einzelarbeit mit dem Chatbot chatten.

Gerade weil das Entwicklungstempo im Bereich KI sehr hoch ist, ist es um so wichtiger Lernenden den reflektierten Umgang damit zu ermöglichen. Dies wird für sie eine wertvolle Lernerfahrung sein und anders zu ihrer persönlichen Weiterentwicklung beitragen, als wenn die KI aus dem Klassenzimmer verbannt wird und stattdessen heimlich und als Hausaufgabenersatz genutzt wird. Aufgabe der Schule wird es mehr denn je sein, Lust am Lernen zu fördern.

Quellen

- Holzäpfel, L., Prediger, S., Götze, D., Rösken-Winter, B., & Selter, C. (2024). Qualitätsvoll Mathematik unterrichten: Fünf Prinzipien. *mathematik lehren*, 2024(242), 2-9.
- Midlarsky, S. (2024). *The Art of Learning Math: A Manual for Success*. Rowman & Littlefield.
- MUED-Homepage, <https://www.mued.de/ueber-uns>, Abruf: 03.10.2024
- Poitzmann, N., & Sobel, M. (2023). *Upgrade: 21st Century Skills: Das 4K-Modell des Lernens in der Praxis*. Klett/Kallmeyer.
- SWK Talk Large Language Models und ihre Potenziale im Bildungssystem, https://www.kmk.org/fileadmin/Datien/pdf/KMK/SWK/2024/Impulspapier_LLM_Praesentation_SWK-Talk.pdf, Abruf: 03.10.2024
- KMK: Handlungsempfehlungen, https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2024/2024_10_10-Handlungsempfehlung-KI.pdf, Abruf: 15.10.2024

Zur Unterstützung bei der Überarbeitung dieses Artikels wurde Chatgpt genutzt, um Feedback zu erhalten, welches geholfen hat, die Struktur, Nachvollziehbarkeit und sprachliche Klarheit zu verbessern. Bei Übersetzungen aus dem Englischen wurde auf DeepL zurückgegriffen.

KI-Chatbots und die Mathematik

Gerti Kohlruss

KI-Chatbots von Open AI und die Mathematik

Bevor wir über den Einsatz von KI-Chatbots mit unseren Lernenden im Mathematikunterricht nachdenken, macht es Sinn, sich damit auseinanderzusetzen, was wir denn zurzeit hiervon für mathematische Erarbeitungen an (wahrscheinlicher) Qualität erwarten können. Hierbei werde ich mich auf die vergangenen zwei Jahre fokussieren, auf eigene Experimente zurückgreifen und mich auf OpenAI-Chatbots beschränken. Die Beschränkung auf Open AI hat nur den Grund, dass ich hier die meisten eigenen Erfahrungen gesammelt habe. Aktuelle Vergleichstests deuten darauf hin, dass sich viele der hier getroffenen Aussagen auch auf andere Modelle übertragen lassen. Alles, was aktuell an KI-Modellen genutzt werden kann fällt unter die Kategorie "angewandte KI" oder auch schwache KI genannt.

Als ChatGpt im November 2022 von allen genutzt werden konnte, verbreitete sich diese Möglichkeit erstaunlich rasch. Doch bei vielen Mathematiklehrer:innen kam besonders schnell Ernüchterung auf. In den Anfängen konnte der Chatbot die einfachsten Rechenoperationen nicht korrekt bearbeiten, sondern spuckte selbstbewusst komplett falsche Zahlen aus. Logische Anforderungen wurden sehr häufig verpasst. Dies nahmen manche Lehrenden zum Anlass sich entspannt zurückzulegen und zu denken, dieser Hype hat mit meinem Unterricht nichts zu tun. Dies erinnert an Roy Amara, einen amerikanischen Wissenschaftler und Zukunftsforscher, der in den 1960er Jahren sagte: "We tend to overestimate the effect of a technology in the short run and underestimate the effect in the long run." Wenn wir uns diese Aussage bewusst machen, ist dies vielleicht eine Hilfe gegen die gefühlte Überforderung durch die Fülle neuer KI-Modelle und KI-Anwendungen: Es ist nicht wichtig auf jeden fahrenden Zug gleich aufzuspringen, man sollte aber auch nicht alle Züge vorbeifahren lassen. Warum nicht? Hierzu haben wir unsere Gedanken in dem vorherigen Artikel erläutert.

Die Skepsis ist und bleibt berechtigt, dass die derzeitigen Large Language Modelle weiterhin Schwächen zeigen, die ihre Verlässlichkeit insbesondere im mathematischen Bereich einschränken. Es gilt immer noch, dass bei komplexen Berechnungen (insbesondere symbolischer Art) häufiger Fehler auftreten, dass nicht alle Voraussetzungen genutzt und evaluiert werden, und dass der stochastische Charakter Halluzinationen zutage fördert.

Mit jedem Entwicklungsschritt zeigen sich durchaus Verbesserungen. Zu beachten ist dabei, dass viele der Verbesserungen gar nicht allein auf den

Chatbot selbst zurückzuführen sind, sondern dass im Hintergrund beispielsweise Python-Bibliotheken aufgerufen werden, die Rechenoperationen, ähnlich wie ein CAS-System, in der Regel korrekt ausführen. Wenn also mathematische Aufträge erkannt werden, werden diese an spezialisierte Software-Tools delegiert, die hier besser geeignet sind.

Da kann man natürlich jetzt argumentieren, dann sollten Lernende lieber direkt mit dem MMS-System arbeiten, da kennen wir das konkrete Tool und können die Grenzen und Schwächen besser ausloten. Trotzdem kann die Interaktion für Lernende mit einem KI-Chatbot hilfreich sein, wenn die symbolische Syntax bzw. die benötigten Befehle, die für die eigene Delegation an CAS-Systeme notwendig wären, noch nicht behandelt wurden oder noch nicht sicher angewendet werden können.

Ich möchte hier anhand von Beispielen, aktuelle Entwicklungen demonstrieren. Zwei Anmerkungen vorab:

- Auch viele mathematische Wissenschaftler:innen nutzen mittlerweile systematisch Mensch-Maschinen-Kollaboration und arbeiten aufgrund der Komplexität der Probleme auch mit größeren Teams zusammen, auch an Beweisen. Hierbei helfen KI-Tools unter anderem dabei, Beweiseschritte zu strukturieren und zu vereinfachen. Dies hat Terence Tao, ein australisch-US-amerikanischer Wissenschaftler, der 1988 mit 12 Jahren die Goldmedaille bei der internationalen Mathematik-Olympiade (IMO) gewonnen hat, beeindruckend auf der diesjährigen IMO dargestellt. (s. <https://youtu.be/e049loFBnLA> bzw. QR-Code erzeugt mit KI)
- KI ist in bestimmten Anwendungsszenarien eine starke Unterstützung, vieles bleibt der natürlichen Intelligenz selbst zu tun. Diese Anmerkung wird gut durch die folgende Aussage von Terence Tao gestützt: "On the other hand the funny thing about these tools is that things that humans find difficult, AI can do very easily sometimes, but things that humans find easy AI often struggles with. ..." -Terence Tao (42:46 im Video s.o.)

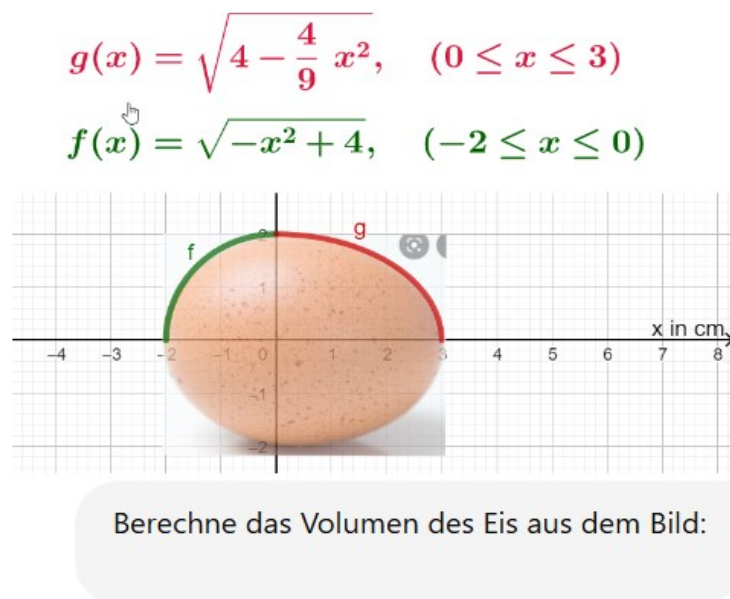


Die Beispiele können einzeln angeschaut werden. Sie stehen in keinem direkten Zusammenhang. Hiermit möchte ich motivieren auf der Tagung viel auszuprobieren und weiter zu experimentieren und dann sich auszutauschen, welche Bedeutung wir dem unterrichtlich beimessen.

Beispiel 1 - ausprobiert mit gpt 4o

Im Rahmen einer Geogebra-Fortbildung stellte Johannes van Lück im Mai 2024 folgendes Problem im Rahmen eines Escape Rooms, das uns aus dem Mittagstief holen sollte.

Hier hat mich gleich interessiert, inwieweit der Chatbot diese Graphik richtig interpretiert und (mit Hilfe der mathematischen Hintergrund-Tools) diese Berechnung nur anhand des Bildes und eines sehr kurzen Prompts "Berechne das Volumen des Eis aus dem Bild" leisten kann.



Zügig erhielt ich die folgende Antwort:

To calculate the volume of the egg depicted in the image, we can use the provided functions and the disk method for rotating the curves around the x-axis. The volume V can be calculated using the integral of the cross-sectional areas.

$$\text{Given: } g(x) = \sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2} \quad \text{for } 0 \leq x \leq 3 \quad f(x) = \sqrt{-x^2 + 4} \quad \text{for } -2 \leq x \leq 0$$

We will calculate the volume for each part separately and then sum them up.

1. For $g(x)$ from 0 to 3: $V_g = \pi \int_0^3 \left(\sqrt{4 - \frac{4}{9}x^2}\right)^2 dx$
2. For $f(x)$ from -2 to 0: $V_f = \pi \int_{-2}^0 \left(\sqrt{-x^2 + 4}\right)^2 dx$

Let's calculate these integrals.

$$V_g = \pi \int_0^3 \left(4 - \frac{4}{9}x^2\right) dx \quad V_f = \pi \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx$$

Now, I will compute these integrals.

The volume of the egg, calculated by rotating the given functions around the x-axis, is approximately 41.89 cm^3 . [?]

.I.

Und tatsächlich kann man sich zusätzlich auch die Hintergrundinteraktion anzeigen lassen:

```
import sympy as sp

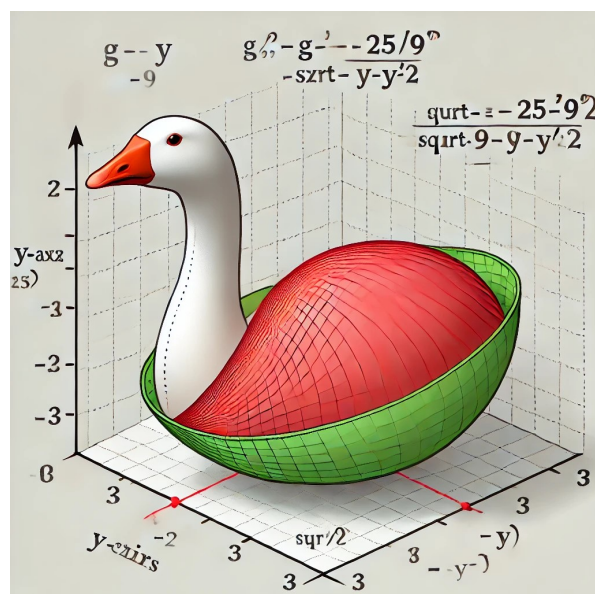
# Define the variables and functions
x = sp.symbols('x')
g = sp.sqrt(4 - 4/9 * x**2)
f = sp.sqrt(-x**2 + 4)

# Integrate for the volume of the egg
V_g = sp.pi * sp.integrate(g**2, (x, 0, 3))
V_f = sp.pi * sp.integrate(f**2, (x, -2, 0))

# Total volume
V_total = V_g + V_f
V_total.evalf()
```

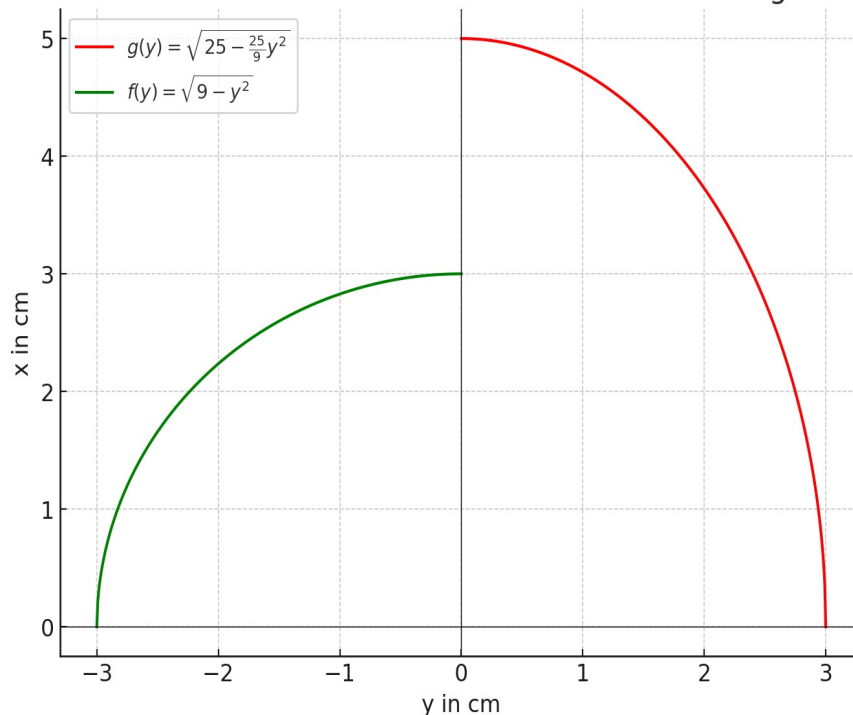
Die hier verwendete Bibliothek, selbst in Python geschrieben, ist ein leichtgewichtiges CAS-System, welches grundlegende symbolische Berechnungen ausführen kann.

Dann hat mich weiter interessiert, was passiert, wenn die Aufgabe offener gestaltet ist. Daher habe ich den Bot gefragt, wie man denn vergleichbar ein Gänseei modellieren könnte, um die Volumina dann zu vergleichen. Das war ein fröhliches Hin- und Herschreiben. Manchmal habe ich vor Staunen den Mund nicht mehr zu bekommen. Z. B. bei diesem Zwischenergebnis für eine Modellskizze:



Gleich zweimal habe ich folgendes mathematische Modell bekommen, das zweite Mal, obwohl ich den stetigen Übergang angemahnt hatte:

Graphen der Modellfunktionen für die obere Eikontur des liegenden Gänseeis



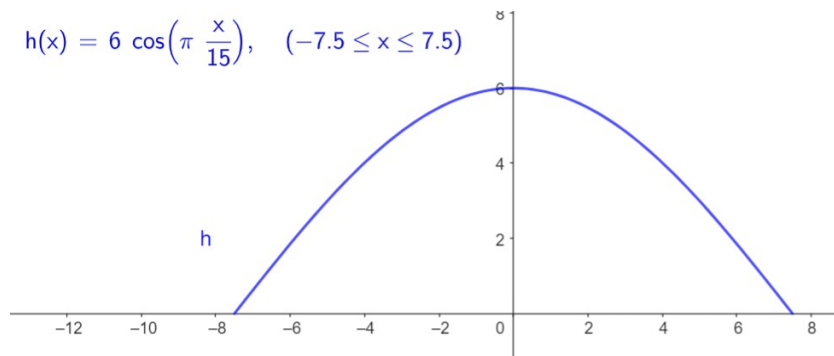
Erstes Fazit: Bei offenen Modellierungsaufgaben braucht es (derzeit) viel kritische Überprüfung, intentionale Steuerung und Geduld (eigenes Modellieren geht hier sehr viel schneller). Auch in anderen Zusammenhängen habe ich schon festgestellt, dass menschlich geschulte Augen viel schneller Knackpunkte finden, während gpt 4o hier weitgehend im Dunkeln tappt, bzw. halluziniert.

Dann gibt es mittlerweile ein weiteres Modell, das Modell o1-preview, das in der Bezahlversion von ChatGPT ausgewählt werden kann. Open AI veröffentlichte diese Version im September 2024 und schreibt ihr ein "ausgeprägtes logisches Denkvermögen und ein breites Weltwissen" zu. Dieses Modell kann (noch) keine Bilder oder andere Dateien importieren. Das schränkt vielleicht die Vergleichbarkeit ein, trotzdem ... Wie groß ist wohl das Volumen eines Straußeneis? (Ich habe mal gehört, dass man zur Produktion einer Flasche Eierlikör entweder 20 Hühnereier oder 1 Straußenei benötigt).

Wer den vollständigen Chatverlauf lesen möchte, kann dies [hier](#) tun.

Tatsächlich wird konsequent Schritt für Schritt des Modellierungskreislaufs abgearbeitet. Kern der mathematischen Modellierung ist ein Ellipsoid mit stimmiger Länge und passendem Durchmesser. Das berechnete Volumen ist etwas mehr als ein Liter. Die mathematischen Ergebnisse werden plausibel validiert.

Im weiteren Prompt habe ich den Bot aufgefordert, das mathematische Modell so zu entwickeln, dass es auf der Rotation einer Randfunktion um die x-Achse der Länge nach basiert, wobei an der Stelle 0 der größte Durchmesser angenommen wird.

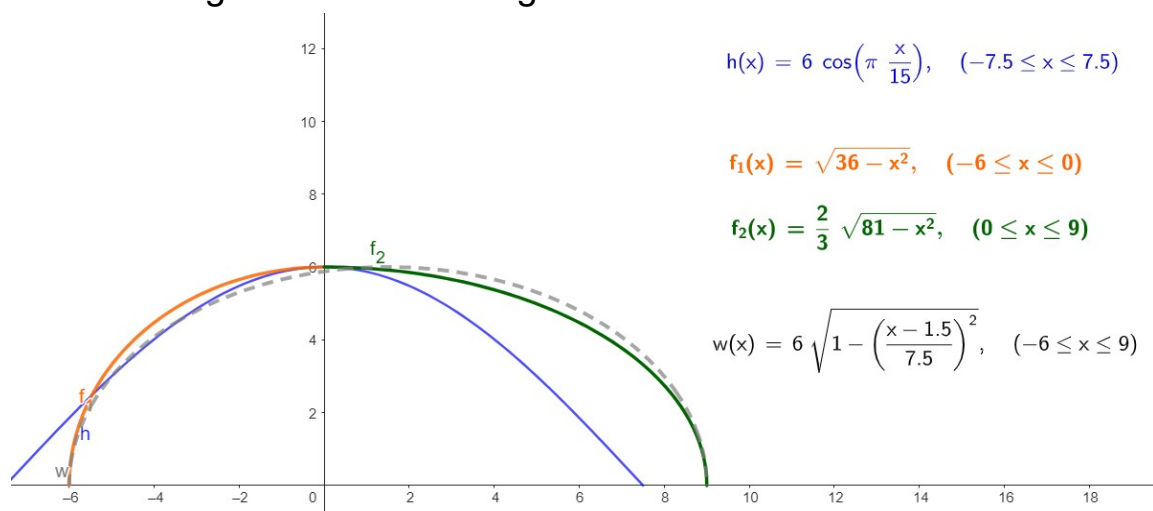


Hier kann man mit bloßem Auge sehen, dass die Ei-Form weniger gut getroffen ist und das Volumen so zu gering ausfällt. Im Validierungsschritt heißt es in dieser Iteration dann auch: **Modellüberprüfung:** Die angenommene Funktion könnte die reale Form des Eies nicht vollständig abbilden. Möglicherweise ist die Cosinus-Funktion nicht optimal für die genaue Form eines Straußeneies."

Also eine dritte Iteration: Der Prompt lautete

Durchlaufen wir den Kreislauf ein drittes mal. Die Eiform kann meiner Ansicht besser mit zwei Funktionen modelliert werden, da das "aufrechte" Ei unten dicker und gedrungener ist, während es oben länger und enger wird. Ziel ist also wieder mit dem Rotationsvolumen um die x-Achse zu arbeiten, aber die Ei-Form besser zu berücksichtigen. Die Randfunktion sollte stückweise definiert werden.

Ohne mein Zutun wurde bei diesem Modell nun der knick- und sprunghafte Übergang für das Modell gefordert und die Berechnungen mit hierauf aufgebaut. Nun erfolgt die Modellbildung ähnlich zum Hühnerei.



Darstellung der Modellphase 2 und 3.
Die gestrichelte Kurve stellt das Ellipsoid aus Modell 1 dar.

Interessanter Weise stößt man an dieser Stelle auf das Phänomen, dass die erste Lösung des Ellipsoids sowie die Lösung mit Berücksichtigung der Eiform zu exakt demselben Volumen von $360 \cdot \pi \text{ cm}^3$ führen, also etwas mehr als 1l.

$$V = \pi \int_{-6}^0 (f_1(x))^2 dx + \pi \int_0^9 (f_2(x))^2 dx$$

≈ 1130.97 =

$$V_E = \pi \int_{-6}^9 (w(x))^2 dx$$

≈ 1130.97 =

Zweites Fazit: Das neue Modell o1-preview verhält sich bei diesem Experiment robust und stellt die Schritte nachvollziehbar und verständlich dar. Wieder mit kritischem Denken und intentionaler Lenkung könnte man nun in gleicher Zeit im Unterricht tatsächlich mehrere Modellzyklen schaffen, und wie hier auf verblüffende Erkenntnisse stoßen: Solange Länge und maximaler Durchmesser gleichbleiben, spielt es für das Ei-Volumen keine Rolle, ob das Ei ein dickes und spitzeres Ende hat, oder es symmetrisch zur Mitte ist (wie es der grau-gestrichelte Graph zur Funktion w veranschaulicht). Meiner Ansicht nach fühlt sich so ein Vorgehen mehr nach mathematisch Explorieren an und könnte helfen auch komplexere Probleme bereits in der Schule angehen zu können.

Beispiel 2 - IQB-Aufgabe

2024_M_erhoeht_B_Analysis_MMS_2, Aufgabe 1 a) - e)

Die Aufgabe ist hier einsehbar: https://www.iqb.huberlin.de/abitur/pools2024/abitur/pools2024/mathematik/mathematik%20erhoeht/2024_M_erhoeht_B_1.pdf

Mich interessierte, mit welcher Qualität ChatGPT eine Abituraufgabe aus dem Aufgabenpool 2024 bearbeitet. Ich habe das neuere Modell o1-preview gewählt, das Open AI auf der Webseite <https://openai.com/index/introducing-openai-o1-preview/> mit folgenden Worten einführt (übersetzt mit DeepL): „Wir haben eine neue Reihe von KI-Modellen entwickelt, die mehr

Zeit zum Nachdenken brauchen, bevor sie reagieren. Sie können komplexe Aufgaben durchdenken und schwierigere Probleme lösen als frühere Modelle in den Bereichen Wissenschaft, Programmierung und Mathematik.“ Tatsächlich braucht dieses Modell in der Regel länger (und ist somit auch teurer). Daher ist dieses Modell zurzeit nur mit einem Bezahlaccount nutzbar und auf 50 Abfragen pro Woche begrenzt. Bisher kann es auch nicht im Web suchen und akzeptiert keine Bilder oder Dateien. Daher ist die direkte Vergleichbarkeit mit anderen Modellen schwieriger. Der komplette Chatverlauf ist [hier](#) einsehbar.

Folgende Beobachtungen habe ich gemacht:

1. Die Ergebnisse sind weitgehend richtig und werden strukturiert und nachvollziehbar hergeleitet.
2. Bei Teilaufgabe c) wird allerdings nur nachgewiesen, dass es einen gemeinsamen Punkt nämlich (0|0) gibt, nicht aber dass es der einzige gemeinsame Punkt ist. Im Teil e) wird nur das notwendige Kriterium beachtet. Auf meine Nachfrage nach c) wird ein allgemeiner direkter Beweis geliefert und nicht ein in diesem Fall (zumindest für Menschen) naheliegender indirekter Beweis.

Beispiel 3: Kann ChatGPT Sudokos lösen?

Nachdem ich getestet hatte, dass das neue o1-Modell auch ein Logikrätsel korrekt bearbeitet hat, interessierte mich, wie gut Rückwärtsarbeiten wohl klappt. Hierzu habe ich ein mittelschweres Sudoku gewählt. Da das o1preview-Modell keine Bilder importiert, habe ich die Vorgabe in Matrixform gemacht.

				1		8		
1						7		
7	6			9				
							3	
		1	6		4			
	5	8					9	4
			4	5	1			3
9								1
4					3			5

Gestartet bin ich mit folgendem Prompt:

Ich beschreibe dir ein Sudoku-Spielfeld mit 3x3 Untermatrizen mit jeweils 3 Zeilen und 3 Spalten. Damit du weißt in welchen Zellen bereits etwas steht und in welchen nicht, werde ich die Stellen die eine Zahl haben mit der Schreibweise $a_{ij} = \text{zahl}$ beschreiben. i ist die Zeilennummer von 1-9 und j die Spaltennummer zwischen 1 und 9. "zahl" ist jeweils die eingetragene Zahl. Dies sind die Eintragungen: $a_{15}=1$; $a_{17}=8$; $a_{21}=1$; $a_{27}=7$; $a_{31}=7$; $a_{32}=6$; $a_{35}=9$; $a_{48}=3$; $a_{53}=1$; $a_{54}=6$; $a_{56}=4$; $a_{62}=5$; $a_{63}=8$; $a_{68}=9$; $a_{69}=4$; $a_{74}=4$; $a_{75}=5$; $a_{76}=1$; $a_{79}=3$; $a_{81}=9$; $a_{89}=1$; $a_{91}=4$; $a_{96}=3$; $a_{99}=5$; Prüfe ob dieses Sudoku lösbar ist und gib alle Lösungen an. Wenn möglich als Bild ansonsten in der gleichen Schreibweise wie oben von mir verwendet. Erläutere wie du vorgegangen bist, und welche Strategien bei der Lösung hilfreich sind. Begründe, woher du weißt, dass du alle möglichen Lösungen gefunden hast.

Nach 78 Sekunden kam dieses Ergebnis:

5	2	4	9	1	3	8	7	6
1	3	9	5	6	8	7	4	2
7	6	8	2	9	4	5	1	3
6	9	2	7	8	5	4	3	1
8	5	1	6	3	4	9	2	7
3	7	4	1	2	9	6	8	5
2	8	6	4	5	1	3	9	7
9	4	5	3	7	2	1	6	8
4	1	7	8	6	3	2	5	9

Auf dem ersten Blick sah es richtig aus, doch man achte in der Vorgabe im Vergleich zum Ergebnis auf a_{63} ! Im weiteren Chatverlauf wurde trotz Hinweis, dass die Vorgabe korrekt ist und es mindestens 1 Lösung gibt, entweder bekundet, dass es keine Lösung gäbe oder erneut eine falsche erstellt. Ein einfacher Online-Sudokolöser liefert sehr schnell eine Lösung. Insgesamt hat das Modell "3 Minuten Rechenzeit" verwendet.

Leitideen Mathematikunterricht im Kontext von KI

Handlungsorientierung

Adaptivität

Kontrollierende Intervention

Selbstermächtigung

Demokratiebildung

Kritischer Einsatz von KI
Lust am Lernen erhalten

Fachdidaktische Prinzipien

Kognitive Aktivierung

Verstehensorientierung

Kritisches Denken

Reflexionskompetenz

Selbstgesteuertes Lernen

Kommunikationsförderung

Ko-konstruktives Lernen

Verantwortungsübernahme

Demokratische Schulkultur

Lernenden-Orientierung

Personalisierung des Lernens

Technologische Unterstützung

... die letzte Seite ...

Spielerisch mit KI experimentieren - zwei Vorschläge

ChatGPT - Schlag die KI ist ein kreatives Spiel aus dem frechverlag, bei dem Spieler:innen gegen einen KI-Chatbot antreten. Das Ziel ist es, möglichst kreative Lösungen zu Aufgaben zu finden und damit besser abzuschneiden als die KI.



Eine mögliche Aufgabe ist beispielsweise: "Erfinde einen Namen für ein Tier, halb Hahn, halb Oktopus!" Die Gruppe zieht eine Karte mit einer kreativen Aufgabe. Alle am Tisch schreiben ihre möglichst kreativen Einfälle auf. Die Frage wird ebenfalls in ChatGPT eingegeben, Anschließend werden alle Antworten vorgelesen. Die Gruppe entscheidet. Haben Mitspielende nach Meinung der Gruppe bessere Vorschläge ermittelt als ChatGPT dürfen sich diese einen Punkt notieren.

Dies ist auch für den Unterricht eine niederschwellige Möglichkeit, ein Gefühl für die Arbeitsweise und Fähigkeiten eines KI-Chatbots zu vermitteln und gleichzeitig die eigene Kreativität zu fordern.

Eine weitere spielerische Möglichkeit ist es einen **Promptathon** auszurichten (Kunstwort aus Hackaton und Prompten).

Einzelpersonen versuchen, die besten **Prompts** für KIChatbots oder auch Bild-KIs zu entwickeln. Das Ziel besteht darin, besonders effektive Prompts zu entwickeln, um aus der KI die gewünschten oder überraschend gute Ergebnisse herauszuholen. Dies könnte auch ein spannendes Format für den Mathematikunterricht sein, um voneinander mehr über Prompting-Strategien zu lernen.

